Modelo de Crecimiento Neoclásico de Solow-Swan y determinantes del crecimiento económico

Dra. Ana Sofía Malagamba Morán

Facultad de Economía
Universidad Nacional Autónoma de México

11 de noviembre de 2023

Outline

Repaso

- Una función F es homogénea de grado ρ si:

$$F(\gamma K, \gamma N) = \gamma^{\rho} F(K, N)$$

- De esta función, el teorema de Euler declara que:

$$\rho F(K, N) = K\frac{\partial F}{\partial K} + N\frac{\partial F}{\partial N}$$

- Lo que implica que si una función F es homogénea de grado ρ, su primera derivada será homogénea de grado $\rho - 1$.
- Para este modelo, consideramos que la función F es homogénea para $\rho = 1$

Supuestos

- El modelo de Solow es un modelo de equilibrio general, donde la producción de una economía puede describirse mediante una función del capital y del trabajo: $Y_t = F(K_t, N_t)$.
- En el que el capital (K) y el trabajo (N) son factores de producción.
- N es una *dotación*, y está denominada en unidades de tiempo, mientras que K se puede *acumular*. La población total de una economía es la población económicamente activa.
- Se produce un solo bien final, que puede usarse indistintamente para consumirse o para invertirse.
- La economía es cerrada y sin gobierno, es decir que la renta esta determinada entre el gasto en consumo y el gasto en inversión $Y = C + I$ y prebalece la Ley de Say $(S = I)$.
- Los hogares ahorran una fracción exógena $s \in (0, 1)$ de su ingreso.
- Existe una tasa de depeciación del capital exógena $\delta \in (0, 1)$.

La función de producción

- Todas las empresas tienen acceso a la misma función de producción. Aceptamos una empresa representativa, que produce el bien final.
- Sea K_t el acervo de **capital**, N_t la cantidad total de **trabajo** en el periodo t, A una variable exógena que mide el progreso tecnológico (o la **productividad total de los factores**), mientras que Y_t es la producción en el periodo t.
- Consideramos una función de producción neoclásica $F(\cdot)$ que relaciona K y N con Y, y dada por:

$$Y_t = AF(K_t, N_t)$$

- A es gratuito, es un bien público puro, no excluible y no rival.
- Note que mientras más grande sea A, la producción es mayor para cierto trabajo y capital, desplazando a $F(\cdot)$.

Propiedades de una Función de Producción Neoclásica $F(\cdot)$

Supuesto

$F(\cdot)$ **exhibe rendimientos constantes a escala (CRS) en** K **y** N**.**

$$F(\lambda K, \lambda N, A) = \lambda \cdot F(K, N, A) \ \forall \, \lambda \in \mathbb{R}^{+}$$

La función $F(\cdot)$ es homogénea de grado uno en estas dos variables, es decir, si aumentamos tres veces la cantidad de cada factor, triplicamos la producción.

Supuesto

Los insumos son esenciales en $F(\cdot)$

$$F(0, N_t) = F(K_t, 0) = 0$$

Tanto el trabajo como el capital son necesarios en la producción.

Propiedades de $F(\cdot)$

Supuesto

$F(\cdot)$ **tiene rendimientos marginales positivos y decrecientes.** La función $F : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}^+$ es dos veces continuamente diferenciable en K y N.

$$PMK \equiv F_K(K,N,A) \equiv \frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad PMN \equiv F_N(K,N,A) \equiv \frac{\partial F}{\partial N} > 0$$

$$F_{KK}(K,N,A) \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad F_{NN}(K,N,A) \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} < 0$$

Lo que significa que hay rendimientos marginales decrecientes, una unidad adicional de un factor aumenta la producción, pero este aumento va decreciendo conforme aumenta la cantidad del factor.

Propiedades de $F(\cdot)$

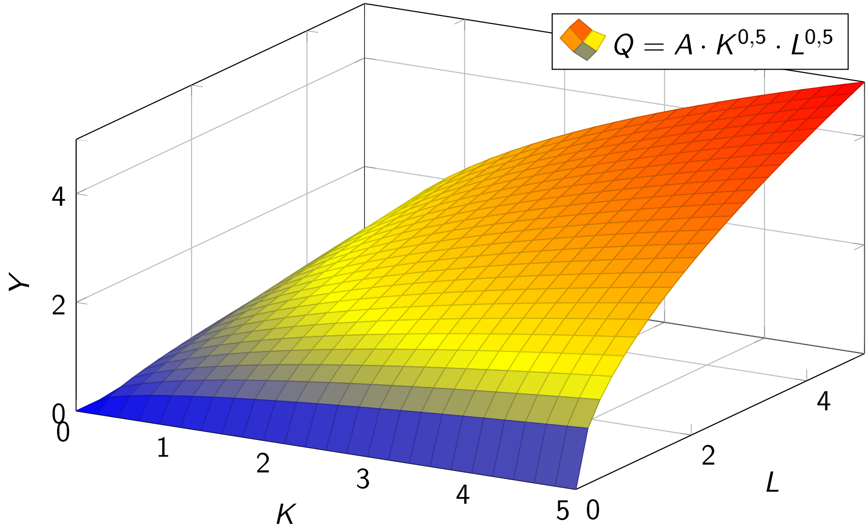
Supuesto

Condiciones de Inada. La PMK (o PMN) tiende al infinito cuando K (o N) tiende a 0, y tiende a 0 cuando K (o N) tiende a infinito.

$$\lim_{K\to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{N\to 0} \frac{\partial F}{\partial N} = \infty$$

$$\lim_{K\to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{N\to \infty} \frac{\partial F}{\partial N} = 0$$

Propiedades de $F(\cdot)$



Demostrando las propiedades

Supongamos que la forma funcional de la función de producción es del tipo Cobb-Douglas: $Y = AF(K_t, N_t) = AK_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$ con $\alpha \in (0, 1)$. Esta exhibe **rendimientos constantes a escala**, debido a que la suma de los exponentes del capital y del trabajo son igual a uno, escalarlos por λ es lo mismo que escalar la función de producción por ese factor λ.

$$(\lambda)Y = AF(\lambda K_t, \lambda N_t) = A(\lambda K_t)^{\alpha}(\lambda N_t)^{1-\alpha} = A\lambda^{\alpha} {K_t}^{\alpha} \lambda^{1-\alpha} {N_t}^{1-\alpha}$$

$$= A\lambda {K_t}^{\alpha} {N_t}^{1-\alpha}$$

Por leyes de exponentes el resultado de la producción es cero. Asi que, **ambos insumos son esenciales**.

$$F(0, N_t) = 0^{\alpha} {N_t}^{1-\alpha} = 0 \ \forall \ \alpha \neq 0 \vee 1$$

$$F(K_t, 0) = {K_t}^{\alpha} 0^{1-\alpha} = 0 \ \forall \ \alpha \neq 0 \vee 1$$

Demostrando las propiedades

Por parte de las **productividades marginales decrecientes por factor**, las primeras derivadas parciales de la función $F(K_t, N_t)$ son:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = F_K(K_t, N_t) = \alpha K_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} > 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial N} = F_N(K_t, N_t) = (1-\alpha) K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} > 0$$

Recordemos que los insumos y α son positivos, por lo que las segundas derivadas son negativas. $F(K_t, N_t)$ satisface el tercer supuesto.

$$F_{KK}(K_t, N_t) = \alpha(\alpha-1) K_t^{\alpha-2} N_t^{1-\alpha} < 0$$
$$F_{NN}(K_t, N_t) = -\alpha(1-\alpha) N_t^{\alpha} N_t^{-\alpha-1} < 0$$

Por parte de las **condiciones de Inada**, se comprueban más adelante.

Problema de optimización

- El problema de optimización es la elección de capital y trabajo para maximizar el beneficio (la diferencia entre ingreso y costos totales).
- El problema se expresa de la forma siguiente:

$$\max_{K_t, N_t} \prod_t = AF(K_t, N_t) - w_t N_t - R_t K_t$$

- En el que R_t es el rendimiento real del capital, w_t el salario real pagado a los trabajadores, y $\prod_t$ el beneficio o ganancia.
- Los precios se normalizan a uno, por lo que el pago de los factores dentro del modelo están en términos reales. Asi que el ingreso es igual a la producción.
- Un ejemplo, si $w_t = 6$, y se producen tenis Panam, los trabajadores reciben 6 tenis Panam por unidad de tiempo utilizada en el trabajo.

Condiciones de primer órden (CPO)

- Las (CPO) de la empresa representativa son:

$$w_t = AF_N(K_t, N_t), \;\; R_t = AF_K(K_t, N_t)$$

- Encontramos las CPO derivando parcialmente con respecto al capital K_t y el trabajo N_t, e igualamos a cero para maximizar:

$$\frac{\partial}{\partial N_t}(AF(K_t, N_t) - w_t N_t - R_t K_t) = 0$$

$$AF_N(K_t, N_t) - w_t = 0$$

- Estas condiciones nos dicen que las empresas deben de contratar trabajo o capital hasta que su costo marginal sea igual a su beneficio marginal (PMK o PMN).
- No se pierde nada durante la producción, y no hay desocupación o sobre ocupación del empleo de factores. Por dicha razón, **este un modelo de competencia perfecta**. Finalmente, los beneficios son cero.

Hogar representativo

- Asumimos que existe un hogar representativo en la economía. A su vez, está dotado unidades de trabajo libre de emplear el tiempo que se decida N_t y un stock inicial de capital K_t. Gana un ingreso Y_t al ofrecer ese tiempo como trabajo, o al recibir rendimientos por el empleo de su capital a una empresa, y mediante dividendos Π_t.
- Puede consumir (C_t) su ingreso, o invertirlo (I_t) en capital adicional.
- Por lo que su restricción presupuestaria es la siguiente:

$$C_t + I_t \leq w_t N_t + R_t K_t + \prod_t$$

- Debido a que los dividendos son cero, al tener que las empresas no obtiene beneficios, el ingreso es igual al gasto y a la producción.

$$Y_t = C_t + I_t$$

Ecuación de acumulación de capital

- Pese a que el nivel inicial de capital K_t está dado, la inversión y depreciación (δ) afectan futuros niveles de capital.
- El capital se acumula acorde a la siguiente expresión:

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t$$

- El capital en el periodo $t+1$ es igual a la inversión en el periodo t y al stock de capital inicial no depreciado.
- Asumimos a la inversión como una fracción ahorrada del ingreso.

$$I_t = sY_t$$

$$C_t = Y_t + sY_t = (1-s)Y_t$$

- La economía consume una fracción de su ingreso e invierte la otra.

Ecuaciones del modelo

- La decisión de inversión es una decisión intertemporal entre el consumo futuro y presente. También asumimos que el hogar ofrece su trabajo inelásticamente; esti implica que la cantidad de trabajo empleada en la economía no depende de tamaño de los salarios.
- Por lo tanto, el modelo de Solow se caracteriza por tener las siguientes ecuaciones:

$$Y_t = AF(K_t, N_t) \quad (1) \qquad Y_t = C_t + I_t \quad (2)$$

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t \quad (3) \qquad I_t = sY_t \quad (4)$$

$$w_t = AF_N(K_t, N_t) \quad (5) \qquad R_t = AF_K(K_t, N_t) \quad (6)$$

- Hay seis ecuaciones y seis variables endógenas, tres exógenas (los factores de producción), así como dos parámetros.

Variables en términos per cápita

- Al insertar la ecuación (1) en (4), y esta en (3), obtenemos:

$$K_{t+1} = sAF(K_t, N_t) + (1-\delta)K_t \tag{7}$$

- Esta ecuación explica lo que sucederá con K_{t+1} sean dados K_t, N_t, A y los parámetros s y δ.
- Es útil describir la ecuación en términos de capital por trabajador:

$$\frac{K_{t+1}}{N_t} = \frac{sAF(K_t, N_t)}{N_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{N_t} \tag{8}$$

- Podemos definir al capital per cápita como $k_t = \frac{K_t}{N_t}$ y a $\frac{F(K_t, N_t)}{N_t}$ como igual a $F(\frac{K_t}{N_t}, \frac{N_t}{N_t}) = F(k_t, 1) = f(k_t)$ Por lo tanto:

$$\frac{K_{t+1}}{N_t} = sAf(k_t) + (1-\delta)k_t$$

Ecuación central del modelo

- Si asumimos que el trabajo es constante en el tiempo: $\frac{N_{t+1}}{N_t} = 1 \therefore$

$$\frac{K_{t+1}}{N_{t+1}} \frac{N_{t+1}}{N_t} = sAf(k_t) + (1-\delta)k_t$$

$$k_{t+1} = sAf(k_t) + (1-\delta)k_t \tag{9}$$

- La ecuación 9 es la central del modelo, explicando el comportamiento dinámico de k_t. Podemos definir las variables per cápita como:

$$y_t = Af(k_t) \tag{10}$$

$$c_t = (1-s)Af(k_t) \tag{11}$$

$$i_t = sAf(k_t) \tag{12}$$

Capital per cápita

- Recordemos de la diapositiva de Repaso que podemos escalar los factores de producción sin cambiar derivadas parciales (Teorema de Euler). Por lo que:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = F_K(K_t, N_t) = F_K(\frac{K_t}{N_t}, \frac{N_t}{N_t}) = \frac{\partial f}{\partial k_t} = f'(k_t)$$

- Por lo que podemos reexpresar (6) en terminos de k_t como:

$$R_t = Af'(k_t) \tag{13}$$

- Para (5) en terminos de k_t volvemos a utilizar el teorema de Euler:

$$F(K_t, N_t) = f'(k_t)K_t + F_N(K_t, N_t)N_t$$
$$F_N(K_t, N_t) = f(k_t) - f'(k_t)k_t$$

Variables en función de k_t

- Por lo que tendríamos la siguiente expresión:

$$w_t = Af(k_t) - f'(k_t)k_tA = A[f(k_t) - f'(k_t)k_t] \tag{14}$$

- Considerando una función de producción Cobb-Douglas, se re-expresan las ecuaciones de la forma siguiente:

$$k_{t+1} = sAk_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t \tag{15}$$

$$y_t = Ak_t^{\alpha} \tag{16}$$

$$c_t = (1-s)Ak_t^{\alpha} \tag{17}$$

$$i_t = sAk_t^{\alpha} \tag{18}$$

$$w_t = (1-\alpha)Ak_t^{\alpha} \tag{19}$$

$$R_t = \alpha Ak_t^{\alpha-1} \tag{20}$$

Análisis grafico

- Considerando a (9) podemos graficar k_{t+1} en función de k_t. Y la pendiente de una curva se puede obtener derivando (15), en este caso de k_{t+1} con respecto a k_t.

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = sAf'(k_t) + (1-\delta) = \alpha sAk_t^{\alpha-1} + (1-\delta) \qquad (21)$$

- La magnitud de la pendiente depende de k_t. Sabiendo que s y $\delta \in (0,1)$ y $f'(k_t) > 0$ la pendiente es positiva.
- No obstante, $f''(k_t) < 0$, por lo que es una función creciente a una tasa decreciente, es decir, mientras aumenta k_t, se reduce $sAf'(k_t)$.
- Por las condiciones de Inada, tenemos una curva que empieza en el origen y es positiva, pero se va nivelando a una pendiente igual a $(1-\delta)$ conforme aumenta el factor productivo.

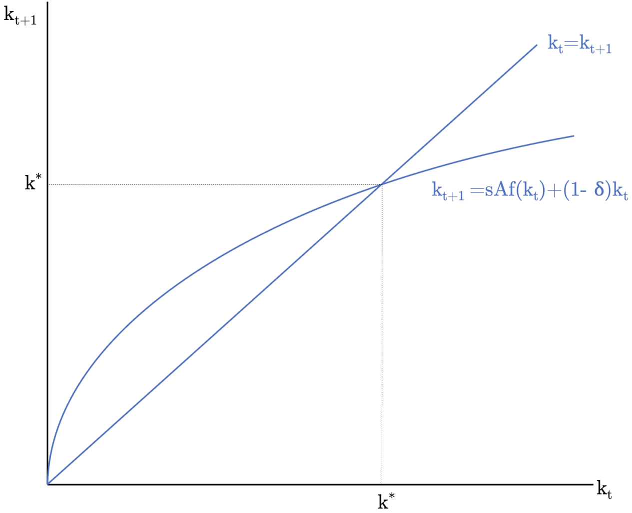
Condiciones de Inada

- Comprobamos, para la funcion de producción Cobb-Douglas, las condiciones de Inada, reexpresando a (21) como:

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \alpha s A \left(\frac{1}{k_t}\right)^{1-\alpha} + (1-\delta)$$

- Si $k_t \to \infty$ entonces $\frac{1}{k_t} \to 0$. Si $k_t \to 0$ entonces $\frac{1}{k_t} \to \infty$.
- Añadimos a la gráfica una función identidad de pendiente uno en la que para todos los puntos de la línea, $k_t = k_{t+1}$.La gráfica de (9) empieza con una pendiente mayor a 1, por lo que está encima de la función identidad.Después de su intersección, la gráfica de (9) se encuentra por debajo de la función identidad.
- Definimos a k^* como el punto en el que $k_{t+1} = k_t = k^*$. Este es el **Estado Estacionario** (EE).

Gráfica de (9)



Gráfica de (9)

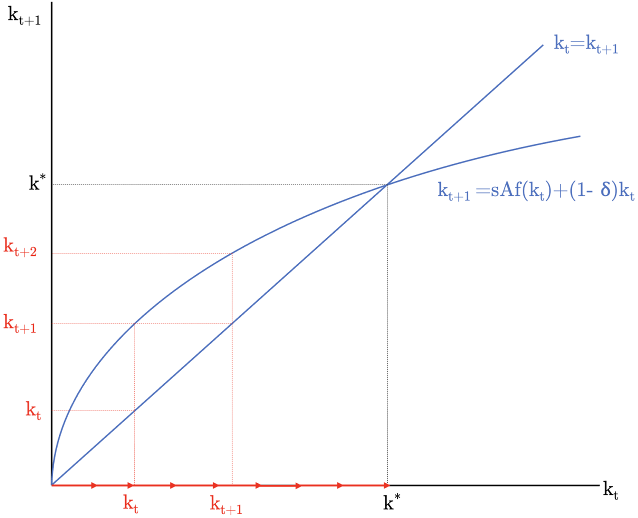
- La inclusión de la función identidad nos permite analizar la dinámica del capital per cápita (k_t).Supongamos que empezamos en un periodo t, donde k_t está por debajo del **EE** $(k_t < k^*)$.En este punto, podemos ver en la siguiente gráfica que $k_{t+1} > k_t$. Por lo que en un periodo futuro, habrá crecimiento.
- Ejemplo: siendo $k_t = 2$, que $k_{t+1} > k_t$, asumiendo $sA, \alpha = 1$, y $\delta = 0$:

$$k_{t+1} = sAf(k_t) + (1 - \delta)k_t = 4$$

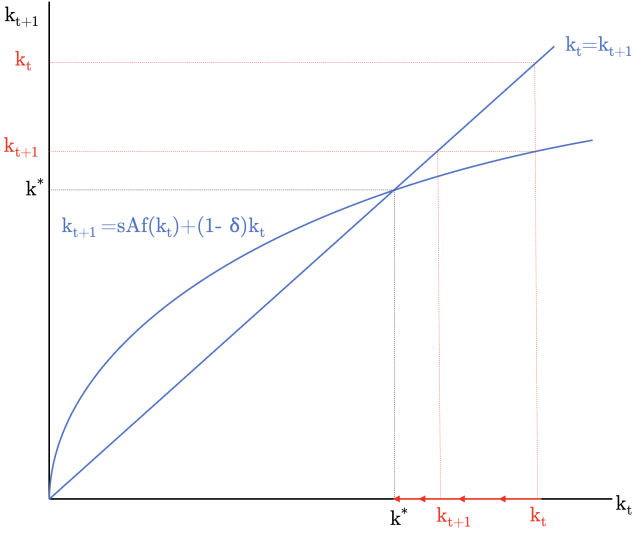
$$k_{t+2} = sAf(k_{t+1}) + (1 - \delta)k_{t+1} = 8$$

- Si $k_t < k^*$, esperamos que el capital per cápita crezca, convergiendo al **EE**. Si $k_t > k^*$, sucede lo contrario esperamos que el capital per cápita caiga, también convergiendo al **EE**.

Convergencia a EE, $(k_t < k^*)$



Convergencia a EE, $(k_t > k^*)$

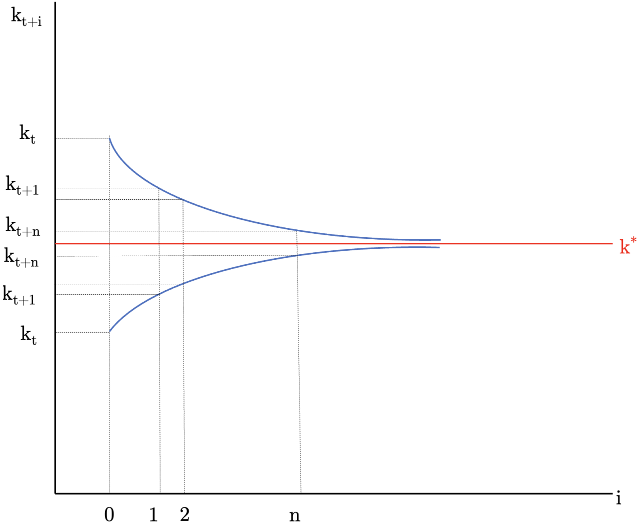


Convergencia al EE

- Para cualquier valor inicial de $k_t \neq 0$, el stock del capital per cápita convergerá al EE (k^*) con el tiempo.
- Mientras mas alejado del EE, más rápido se acerca a este, y mientras más cerca está, más se tarda en acercarse más. Es decir, lejos del EE, el capital per cápita varía mucho más que si está cerca del EE. El EE es de interés porque no importa de donde empiece, la economía gravitará naturalmente a el.
- En el caso anterior: $k_t = k_{t+1} = k^*$, por lo que:

$$k^* = sAf(k^*) + (1-\delta)k^* \rightarrow \delta k^* = sAf(k^*) \rightarrow \frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{\delta}{sA}$$

Convergencia al EE



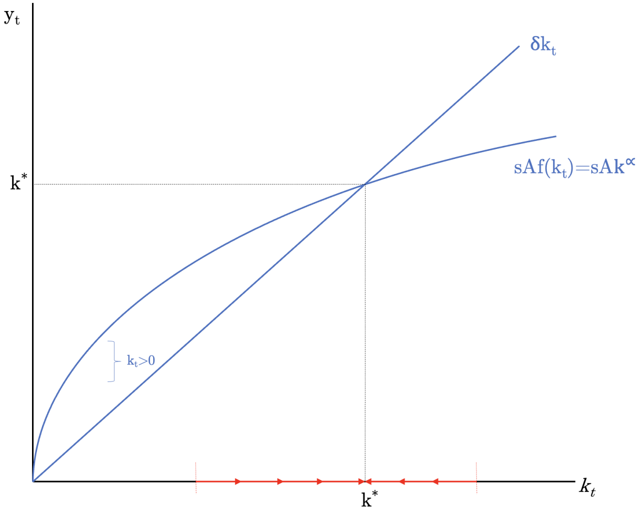
Otra forma de resolver para el EE

- Otra forma de resolver para el EE es convertir (9) en primeras diferencias. Definimos a $\Delta k_{t+1} = k_{t+1} - k_t$, y:

$$
\begin{aligned}
k_{t+1} &= sAf(k_t) + (1-\delta)k_t \\
k_{t+1} - k_t &= sAf(k_t) - \delta k_t \\
\Delta k_{t+1} &= \underbrace{sAf(k_t)}_{\text{Inversión/Ahorro}} - \underbrace{\delta k_t}_{\text{Depreciación}}
\end{aligned} \tag{22}
$$

- La ecuación (22) nos dice que el cambio en el stock de cápital es la inversión menos la depreciación del mismo. Dentro de la literarura clásica a esta expresión se le conoce como **la ecuación fundamental del modelo de Solow**.
- Del lado izquierdo al EE, la inversión supera a la depreciación, por lo que crece el capital per cápita. Del lado derecho al EE, la inversión es menor a la depreciación, por lo que cae el capital per cápita.

Gráfica Clásica del modelo de Solow



Resolver modelo y llegar a EE

Definición 1

Definimos al **Estado Estacionario (EE)** como una trayectoria de equilibrio, en la que, sin choques de progreso tecnológico ni crecimiento poblacional, $k_t = k^* \, \forall \, t$. La economía va a tender a este EE con el tiempo.

- En este punto la curva de ahorro es igual a la curva de depreciación.
- Una vez que la economía llega al EE, se queda allí para siempre. Por lo que **es una soluación estable para este modelo dinámico**.
- La intuición económica: en el punto k^*, la cantidad que se produce es tal, que se ahorra e invierte en exactamente lo que se necesita para compensar la depreciación del capital. Una vez reemplazado el capital depreciado, no queda nada para aumentar el stock de capital.

Resolviendo para el EE

- Suponiendo una función Cobb-Douglas, la ecuación central del modelo sería (15). Para resolver para el Estadio Estacionario de forma algebraica establecemos $k_t = k_{t+1} = k^*$:

$$
\begin{aligned}
k^* &= sAk^{*\alpha} + (1-\delta)k^* \\
k^* &= sAk^{*\alpha} + k^* - \delta k^* \\
\delta k^* &= sAk^{*\alpha} \\
\frac{k^*}{k^{*\alpha}} &= k^{*1-\alpha} = \frac{sA}{\delta} \\
k^* &= \left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (23)
\end{aligned}
$$

- Esta es la ecuación del capital per cápita en el EE.

Variables en el EE

- De (23) podemos ver que es creciente en sA y decreciente en δ.
- Podemos escribir las demás variables en el EE, ya que están en función de k_t y los parámetros.

$$y^* = Ak^{*\alpha} = A\left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{24}$$

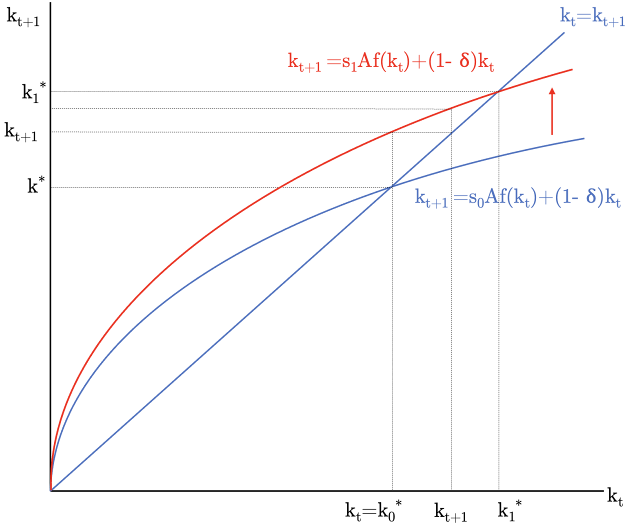
$$c^* = (1-s)Ak^{*\alpha} = (1-s)A\left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{25}$$

$$i^* = sAk^{*\alpha} = sA\left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{26}$$

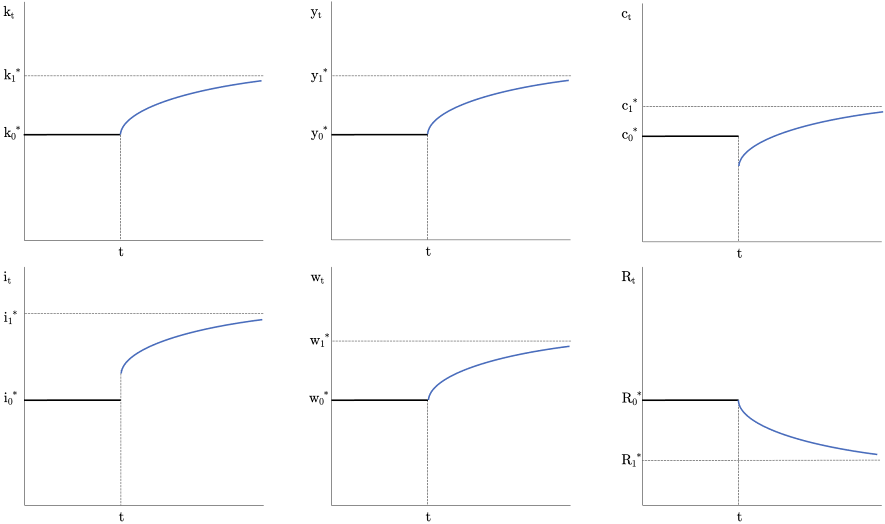
Estatica comparativa (s y A)

- Examinamos como reacciona el modelo ante cambios en los parámetros y variables.
- Consideramos primero un cambio en s. Suponiendo un EE, en el que la tasa de ahorro es s_0, pensemos que en el periodo t sucederá un choque permanente exógeno que cause un aumento en la tasa de ahorro, tal que $s_0 < s_1$.
- Esto causará un aumento en la pendiente de la curva (9).
- Al aumentar la pendiente, esta se estrecha de forma vertical.
- Considerando la primera gráfica, este cambio tiene por efecto que la intersección entre la función identidad y (9) este en un valor más elevado $(k_0^* < k_1^*)$
- Es decir, cuando se eleva s nos encontramos en un EE mayor.
- Nos encontramos debajo del primer EE, lo que causa que crezca el stock de capital hasta llegar al nuevo EE.

Aumento exógeno de *s*



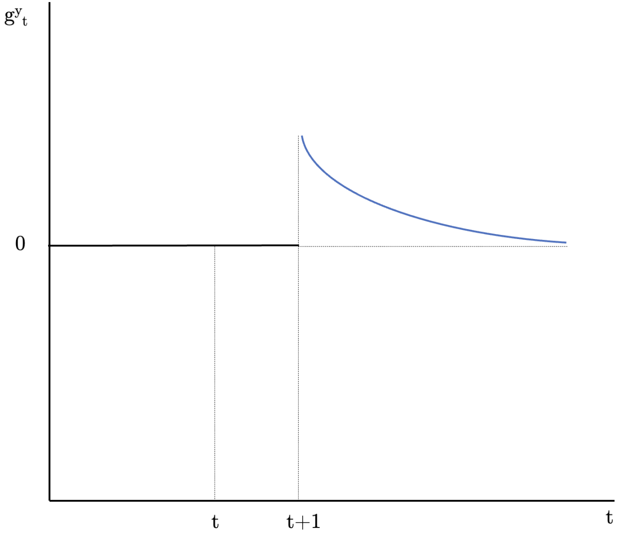
Gráficas efecto dinámico



Efecto dinámico

- Del periodo t a $t+1$, el capital per cápita va creciendo (de forma decreciente) hasta el nuevo EE.
- Como el producto (y_t) es (16), la dinámica es similar que para k_t
- El consumo (c_t) es (17), el aumento en s causa que caiga inicialmente en t, para luego seguir la misma trayectoria que las dos anteriores.
- La inversión es (i_t) es (18), por lo que el aumentó en s causa que aumente en t, para despúes seguir la dinámica.
- El salario (w_t),no reacciona en t, pero luego crece como y_t y c_t.
- El rendimiento del capital no reacciona en t, pero cae por la acumulación de capital y el supuesto de rendimientos decrecientes.
- Entendiendo a la tasa de crecimiento de la economía como: $g_t^y = \ln y_t - \ln y_{t+1}$, tiene pico inicial que se ve acompañado de una caída progresiva hasta llegar al EE (donde $g_t^y = 0$).

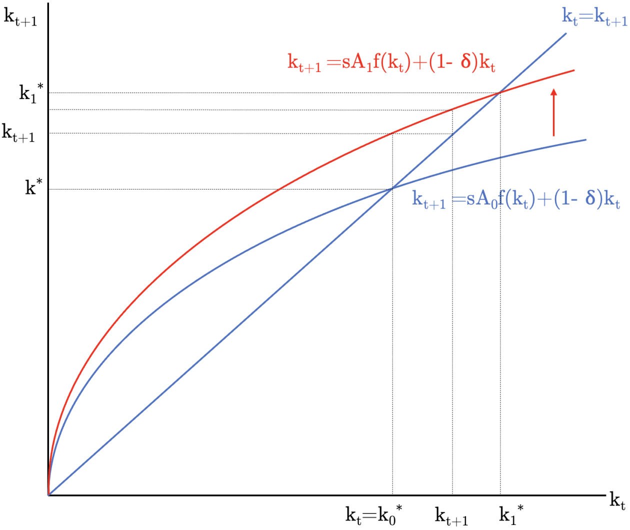
Dinámica del crecimiento



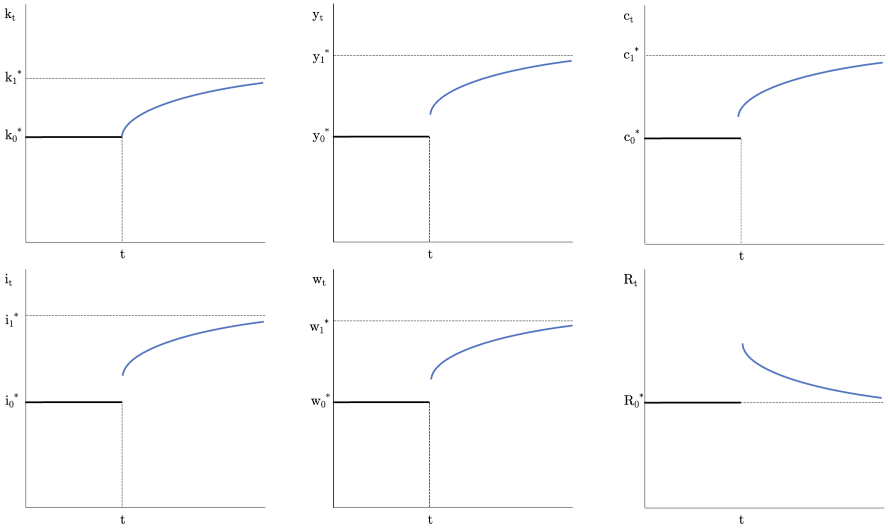
Aumento exógeno de A

- La última imágen nos da una conclusión **crucial** del modelo: el aumento del producto no es permanente tras un aumento de s.
- Consideremos ahora un aumento exógeno de A, en el que $A_1 > A_0$.
- Al afectar la pendiente, el efecto es muy similar que el de un aumento en s, pero los efectos dinámicos son distintos.
- (y_t), por (16), aumenta inmediatamente en t. Para k_t es igual.
- Sucede lo mismo para c_t (17), i_t (18), y w_t (19), por tener a A fuera.
- Mayor A aumenta el PMK, pero luego empieza a caer como en el caso de s.
- Al igual que en el caso anterior, $g_t^y = 0$ después de un aumento inicial.
- La diferencia crucial entre aumentos en s o A es que para A hay un aumento inmediato.
- Ambos casos **confirman** la conclusión **crucial** del modelo: la acumulación de capital **NO** lleva al crecimiento sostenido de una economía.

Aumento exógeno en A



Dinámica de variables



Regla de Oro

Definición 2

Definimos a la **Regla de Oro** como la tasa de ahorro s que maximiza el consumo c en un EE.

- ¿Cuál es la intensidad de los efectos dinámicos en c_t?
- Consideremos a (17). En casos extremos, si $s = 0$, entonces $c^* = 0$. Porque si $s = 0$, entonces $k^* = 0$. No hay ahorro disponible para invertir, por lo que el capital se deprecia totalmente. De la misma forma, si $s = 1$, entonces $c^* = 0$.
- Podemos caracterizar la regla de oro matemática mediante la siguiente condición:

$$Af'(k^*) = \delta \tag{27}$$

- Realicemos la derivación, partiendo de (15)

$$k^* = sAk^{*\alpha} + k^* - \delta k^* \Rightarrow \delta k^* = sAf(k^*)$$

Regla de Oro

- Diferenciamos implícitamente, permitiendo variaciones de s

$$sAf'(k^*)dk^* + Af(k^*)ds = \delta dk^*$$

$$[sAf'(k^*) - \delta]dk^* = -Af(k^*)ds$$

- De (25) se tiene que:

$$dc^* = Af'(k^*)dk^* - sAf'(k^*)dk^* - Af(k^*)ds$$

$$dc^* = [Af'(k^*) - sAf'(k^*)]dk^* - Af(k^*)ds$$

$$dc^* = [Af'(k^*) - sAf'(k^*)]dk^* - [sAf'(k^*) - \delta]dk^*$$

$$dc^* = [Af'(k^*) - \delta]dk^*$$

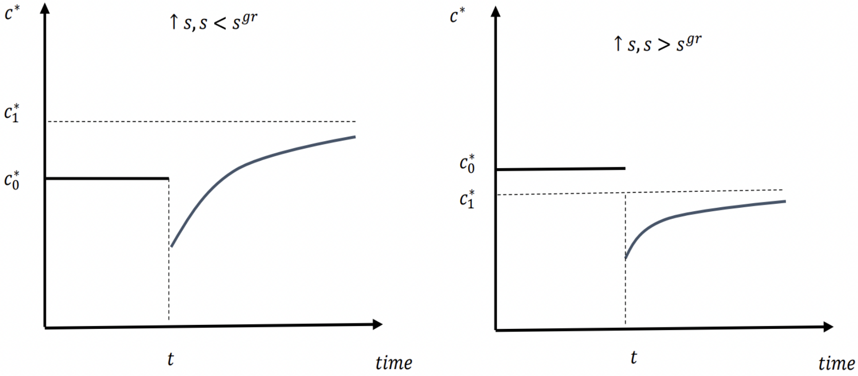
$$\frac{dc^*}{ds} = [Af'(k^*) - \delta]\frac{dk^*}{ds}$$

$$\frac{dc^*}{ds} = 0 \Leftrightarrow Af'(k^*) = \delta$$

Regla de Oro

- La tasa de ahorro que maximiza c^* es aquella para la cual la tasa marginal de productividad del capital es igual a la tasa de depreciación del capital.
- Nos estamos asegurando que nuestra inversión compensa la depreciación.
- Supongamos que para dado $s \Rightarrow Af'(k^*) < \delta$ el capital se deprecia más rápido de lo que se acumula, lo que a largo plazo reduce la capacidad productiva de una economía. En el caso contrario, aumentamos el consumo para aumentar el ahorro, sacrificando consumo presente.
- Si $s > s^{oro}$ el consumo futuro decrece en el futuro EE.
- Si $s > s^{oro}$ el consumo futuro aumenta en el futuro EE, a expensas del consumo presente.

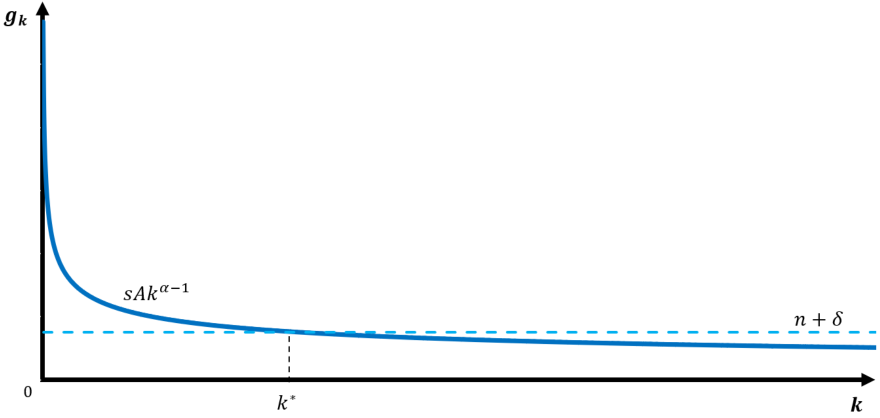
Aumentos de s y efecto en s^{oro}



Convergencia Económica

- Ahora bien, se ha analizado cómo es que se genera el estado estacionario, la regla de oro, y cómo se alcanza el crecimiento económico en términos de la teoría neoclásica. Este modelo ha permito la formulación de una aplicación empírica sobre cómo las economías en conjunto han alcanzado su senda de crecimiento económico. A esto se le llama **convergencia económica**.
- Si a la función fundamental del modelo de Solow se le expresa como tasas de crecimiento económico, se puede obtener una gráfica donde se muestra cómo se alcanza el estado estacionario. Hay dos curvas, una decreciente que sería *la curva de ahorro/inversión* y otra paralela al eje de las abscisas que es *la curva de depreciación*. A mayor distancia entre ambas curvas, la tasa de crecimiento de la economía será mayor, y viceversa.

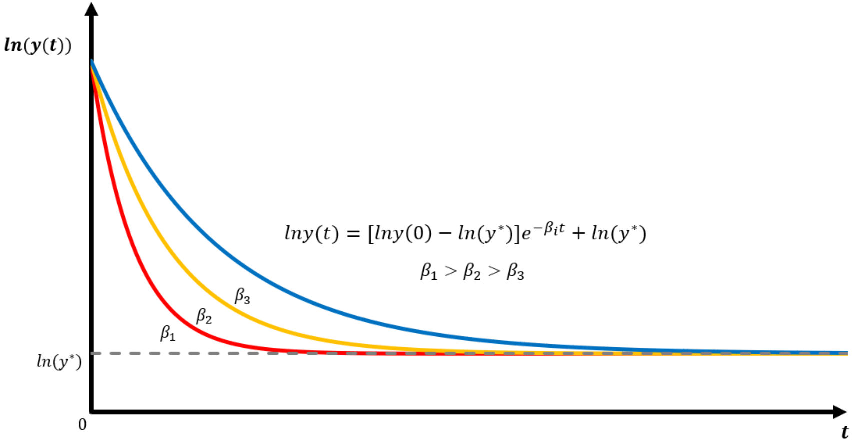
Convergencia al estado estacionario en el modelo de Solow



La Hipótesis de convergencia Económica

- Esta hipótesis menciona que en el largo plazo, existe una relación negativa entre las tasas de crecimiento económico de las economías y su nivel de PIB per cápita. Esto debido a que se supone que se está alcanzando una senda de crecimiento donde el pleno empleo se esta alacanzando y las diferencias estructurales entre países o regiones se mitigan.
- Esta hipótesis se deriva de las soluciones del modelo de Solow, debido a la dinámica descrita sobre el estado estacionario. Existen diversas aplicaciones para casos tanto de México como del mundo. En estab sección solo se recapitulan los conceptos.

Ecuación de Convergencia Económica



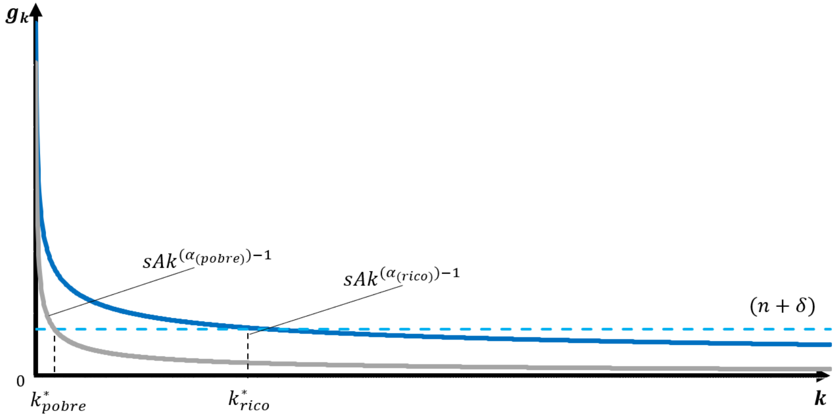
Convergencia Absoluta

- En la literatura aplicada, existen cuatro conceptos de convergencia económica. Estas definiciones buscan analizar si las economías en conjunto alcanzan, teóricamente hablando, una trayectoria hacia su hipotético estado estacionario.
- La **convergencia absoluta** dice que si consideramos a todas las economías como idénticas entre sí (de tal forma que todas pueden representarse a través del modelo de Solow),la única explicación a las tasas de crecimiento entre economías sería la diferencia entre la inversión y la depreciación.
- ¿Esta definición es acertada? Si de ser cierto que únicamente son diferentes las magnitudes de las varaiables estructurales entre economías, en el largo plazo se puede observar que todas las economías convergen entre sí. Pero, este no es el caso. La convergencia absoluta puede analizarse con base en la gráfica anterior.

Convergencia Condicional

- Derivado de la razón anterior, se dice que la convergencia puede ser **condicional**. Muchos autores la definen como la situación en que econommías que difieren entre sí, pero que poseen alguna característica que se les permita agrupar entre diferentes regiones, entonces se puede hablar de un proceso en que de forma generalizada, cada economía alcanza en el largo plazo su estado estacionario, y este es único y distinto para cada economía.
- En la siguiente gráfica se puede ver teóricamente hablando la convergencia condicional. Si se considera a un país pobre, y a otro rico, se podría analizar sobre como cada economía experimente una propia trancisión hacia su estado estacionario. Una llegará más pronto que otra, pero en general ambas poseen una trancisión hacia una convergencia.

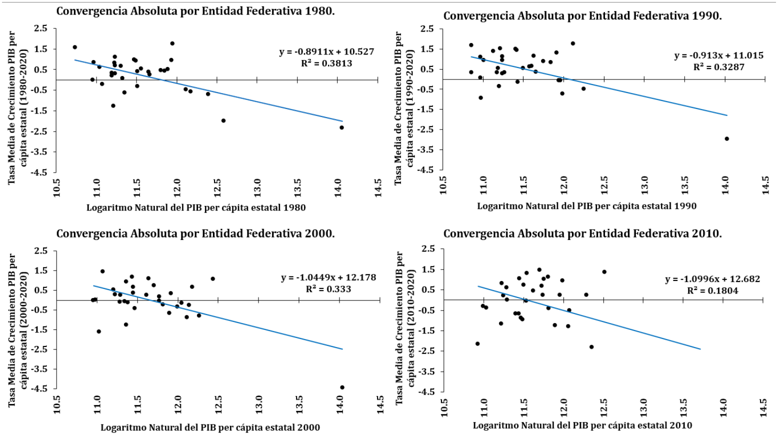
Convergencia condicional dentro del modelo de Solow



Convergencia β

- Esta defınción es meramente empírica. Se trata de encontrar una tasa de descuento a la cuál las economías van a disminuir su nivel de producto per cápita a lo largo del tiempo con el fin de alcanzar su hipotético estado estacionario. Existen diferentes estimaciones a lo largo del mundo (así como muchas publicaciones para las economías al interior de México) sobre que valores poseen estas tasas.
- El tema es muy basto, y como simple introducción a este, se muestra en la siguiente gráfica que los valores de las tasas medias de crecimiento económico entre 2021 y 1993, frente a los valores del PIB per cápita para cada una de las entidades federativas en 1993. Se puede apreciar que existe una tendencia negativa, lo que implica teóricamente hablando que el crecimiento económico en conjunto han encontrado una tendencia de convergencia hacia su estado estacionario.

Regresión de convergencia entre entidades federativas de México



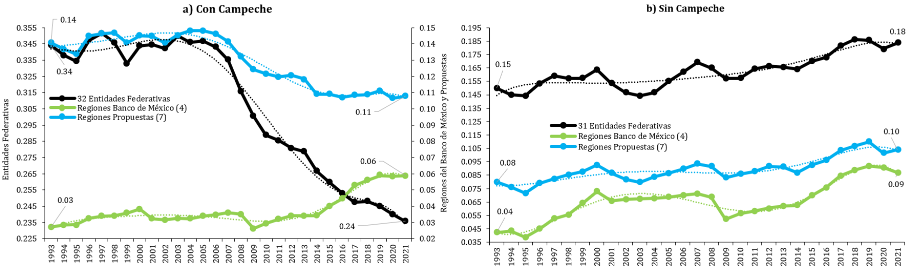
Convergencia σ

- Cómo último concepto se analiza la convergencia sigma. Esta se entiene como la varianza del logaritmo natural del PIB cápita de cada una de las economías a analizar. Si esta varianza con el paso de los años es decreciente, se entiende que cada nivel de PIB cápita esta cada vez más cerca de los demás y por lo tanto homologan su trayectoria de crecimiento económico. Lo que implica que están alcanzando con el paso de los años su estado estacionario.
- En la siguiente gráfica se presenta el nivel de la varianza del PIB per cápita de las entidades federativas de México con el paso de los años (1993-2021). Se puede apreciar que desde el año 2000 las economías del país han decrecido la diferencia con respecto a su media drásticamente, lo que sería un indicio de convergencia. Pero si excluímos el dato atípico de la muestra (el estado de Campeche) se puede apreciar que los valores se revierte, y la economía mexicana esta divergiendo a lo largo de los años.

Convergencia Sigma de las economías de México

Gráfica XLV. Convergencia Sigma en las Regiones Económicas México (1993 – 2021)

Varianza del Logaritmo Natural del PIB per cápita



Elaboración propia con datos del INEGI y Banco de México.

¿Cuáles son los factores al crecimiento económico?

- Desde hace ya muchos años, la litratura económica busca analizar cuál es el papel de diversos fenómenos sobre el nivel agregado de crecimiento económico. Pero no hay una respuesta clara a este fenómeno complejo que se ve afectado de muchas esferas de la vida cotidiana que siempre esta en constante cambio. Del de modelo de Solow nace esta aplicación empírica sobre el crecimiento pero trae a la mesa muchos debates sobre si realmente la convergencia ocurre entre las economías del mundo (para el caso de México no ocurre).
- Se han hecho avances en *la contabildiad del crecimiento*, *estudios del progreso tecnológico*, y *el impacto del capital humano sobre la economía agregada*. El problema de estos estudios, es que se basan en la mayoría de resultados de modelos teóricos, en lugar de otros estudios fuera de las funciones de producción neoclásicas. Se ha hecho la crítica de que en los últimos años la teoría del crecimiento económico ha sido más técnica que empírica.

¿Cuáles son los factores al crecimiento económico?

- Es por eso que también se ha desarrollado otra disciplina dentro del análisis económico, que tiene como fin entender que el lo que permite que economías prosperen, y otras no: *el Desarrollo Económico*. Como lo menciona Jaime Ros, esta rama de la economíabusca fuera de la ortodoxia dar más precisión sobre las cusas del progreso y la expansión de la economía, viendo por fuera de estudios meramente técnicos.
- Y aún así, no hay hasta ahora una clara receta de cocina sobre cómo es que el crecimiento puede garantizarse para cada economía, y cómo se puede superar el atraso, **al menos dentro de la teoría económica**. Como lo menciona el economista Dani Rodrick, existen muchas potenciales políticas económicas que pueden afectar realmente al despegue de las industrias de muchos países en desarrollo, pero existe un gran problema: **las instituciones**.

¿Cuáles son los factores al crecimiento económico?

- Dos economistas, Daron Acemoglu y James Robinson hacen un estudio muy riguroso de porque ciertas regiones del mundo siempre se han mantenido fuera del progreso, y llegan a la conclusión de que los países fracasan en esta meta debido a que las instituciones se forman en actividades meramente extractivas en lugar de inversión y fomento a la actividad económica, con el fin de ostentar poder.
- ¿La teoría del crecimiento es una farsa? No. Más bien, es un conjunto de hipótesis que han no se han estudiado al fondo del asunto y que les falta mucha investigación para ser refutadas o aceptadas totalmente. Al final del día, ambas disciplinas (Crecimiento y Desarrollo Económico) son de cierta forma hermanas, y ambas han permito la formulación de distintos estudios que han fomentado la investigación sobre el crecimiento y todos los fenómenos que inciden en él.

¿Cuáles son los factores al crecimiento económico?

- Esta es una lista de diversos fenómenos y factores, que muchos economistas a lo largo de los años han analizado como potenciales causantes del crecimiento económico:
  - Difusión del conocimiento y educación de la población
  - Clima y meterología
  - Geografía
  - Instituciones
  - Coyuntura Histórica
  - Cultura
  - Fenómenos financieros
  - Infraestructura

Bibliografía

Banxico. (2023). *Tipos de cambio.* Descargado de `https://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?sector=6&accion=consultarCuadro&idCuadro=CR60&locale=es`

Blanchard, O., y Pérez Enrri, D. (2011). *Macroeconomía: aplicaciones para latinoamérica*. Buenos Aires: Pearson Educación,.

Feenstra, R. C., y Taylor, A. M. (2011). *International macroeconomics*. Macmillan.

Gandolfo, G. (2013). *International economics ii: International monetary theory and open-economy macroeconomics*. Springer Science & Business Media.

Garın, J., Lester, R., y Sims, E. (2021). *Intermediate macroeconomics*.

¡Gracias por su atención!