Probabilidad

Dr. Delfino Vargas Chanes

Facultad de Economía
Universidad Nacional Autónoma de México

18 de febrero de 2024

Índice

Teoría de Conjuntos

Definición 1.1

Un conjunto es una colección de objetos distintos.

Definición 1.2

El conjunto vació es aquel sin elementos. Se denota como $\varnothing$ o $\{\}$

Definición 1.3

Sea A un conjunto. Se dice que un conjunto B está contenido en A, denotado por $B \subseteq A$, si todo elemento de B es un elemento de A.

Teoría de Conjuntos

Definición 1.4

El símbolo $\in$ se usa para denotar que un objeto es elemento de un conjunto. $\notin$ denota que un objeto no está en el conjunto.

Definición 1.5

Dos conjuntos son iguales $\Leftrightarrow$ tienen los mismos miembros.

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A$$

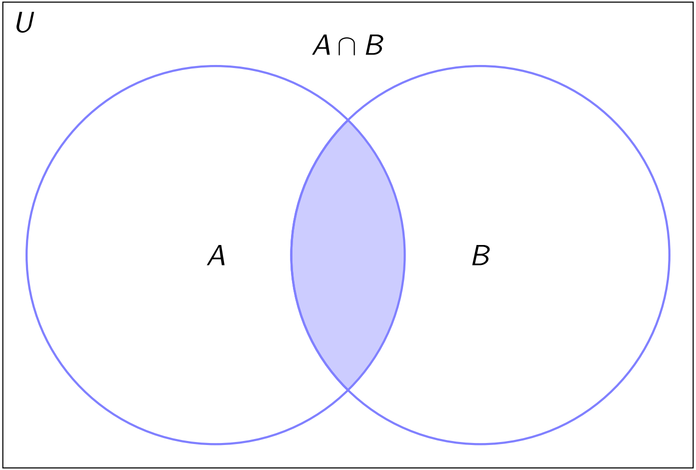
Intersección de Conjuntos

Definición 1.6

La intersección de dos conjuntos $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$ arbitrarios es la colección de todos los objetos contenidos tanto en A como en B. Se denota $A \cap B$ y se define como

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Intersección de Conjuntos

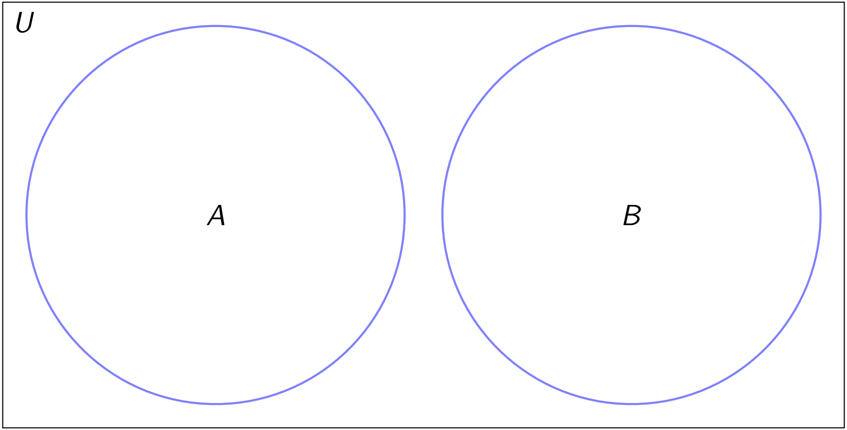


Conjuntos Disjuntos

Definición 1.7

Sean $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$ cualesquiera y $A \cap B = \varnothing \Rightarrow$ decimos que A y B son conjuntos disjuntos

Conjuntos Disjuntos



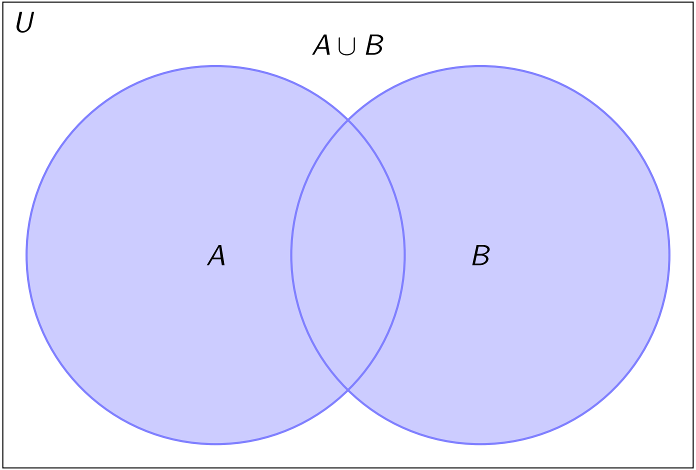
Unión de Conjuntos

Definición 1.8

La unión de dos conjuntos $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$ arbitrarios es la colección de todos los objetos contenidos en A y los contenidos en B. Se denota $A \cup B$ y se define como

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Unión de Conjuntos



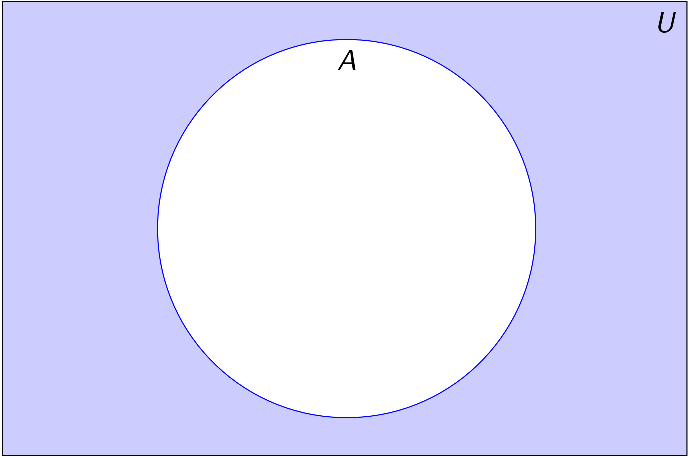
Complemento del Conjunto

Definición 1.9

El complemento de un conjunto $A \subseteq U$ es la colección de objetos en el conjunto de referencia U tales que no se encuentran en A. El complemento de $A = A^c$.

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

Complemento del Conjunto



Introducción a la Probabilidad

- Los fenómenos naturales no necesariamente están regidos por leyes o modelos que puedan explicar la ocurrencia de eventos sociales, económicos o de otro tipo.
- Por ejemplo, sabemos que la probabilidad de que ocurra un terremoto en los próximos 6 años es casi la unidad, pero no es posible predecir la ocurrencia de este evento en las próximas horas.
- Sin embargo, hoy día se dispone de información histórica sobre múltiples eventos sobre el movimiento de placas tectónicas que algunos modelos puedan tener mayor certeza sobre la ocurrencia de eventos como los temblores.

Introducción a la Probabilidad

- En realidad lo que hemos hecho es proponer una conjetura y después coleccionar evidencia empírica para después probar si la conjetura se acepta o se rechaza. Este es el llamado de arte de conjetura (también llamado Ars Conjectandi) propuesto por Jacob Bernoulli, publicado en 1713. (Bernoulli 1713)

Conceptos Básicos

- La probabilidad es la posibilidad de que ocurra un evento y toma valores entre 0 y 1.
- Las probabilidades son un mecanismo que permite el uso de información parcial contenida en un experimento, para inferir sobre la naturaleza de un evento.
- Definiciones básicas experimento, espacio muestral y evento:
  - **Experimento**: se trata del proceso por medio del cual se puede obtener una observación.
  - **Espacio muestral**: está asociado a un experimento y son la colección de todos los resultados posibles obtenidos a partir del experimento.
  - **Evento**: es un resultado en particular que forma parte del espacio muestral. Se suelen usar letras mayúsculas.

Notación de la Probabilidad

- La probabilidad de un evento A, se denota de la forma siguiente

$$P(A)$$

- De una manera frecuentista la probabilidad de que ocurra el evento A se puede estimar mediante la proporción de veces que se espera que ocurra el evento cuando el evento se repite en condiciones idénticas.
- Desde este enfoque tenemos que partir del supuesto que el experimento es repetible y de que se puede observar una regularidad que represente a la proporción de veces que ocurra el evento.
- Un espacio probabilistíco se denota como $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde Ω es el espacio muestral, $\mathcal{F} \subseteq \Omega$ un conjunto de eventos en el espacio muestral, y P la probabilidad asociada a cada evento $A \in \mathcal{F}$

Axiomas de la Probabilidad

- La probabilidad P asociada a cada evento $A \in \mathcal{F}$ satisface los siguientes tres axiomas

1. $\forall\, A \in \mathcal{F} \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \geqslant 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si $A_1, A_2, \ldots$ es una secuencia de eventos disjuntos $\Rightarrow$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- La probabilidad de que ocurran todos los eventos en Ω es 1.
- La probabilidad de un evento es la suma de las probabilidades asignadas a los eventos elementales que contienen dichos eventos.

Consecuencias de los axiomas

Teorema 2.1 (Ley de la adición de eventos)

Sean A y B eventos disjuntos tales que $A \cap B = \varnothing \Rightarrow$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Demostración.

Se sigue del tercer axioma. Tomemos $A_1 = A$ y $A_2 = B$ y todos los demás eventos $A_i = \varnothing \Rightarrow$ se cumple lo siguiente

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$\square$

Consecuencias de los axiomas

Teorema 2.2 (Ley del complemento)

Si denotan al conjunto A y su complemento $A^c \Rightarrow$

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

Demostración.

Aplicamos la **Ley de la adición de eventos** para $A = A$ y $B = A^c \Rightarrow$

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1$$

$\square$

Consecuencias de los axiomas

Corolario 1

$\forall\, A \in \mathcal{F} \subseteq \Omega \Rightarrow 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

Demostración.

Notemos que $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1 = P(\Omega)$

$$\Rightarrow P(A) + P(A^c) \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant P(A) \leqslant P(A) + P(A^c) \leqslant 1$$

$\square$

Consecuencias de los axiomas

- Pero en general no necesariamente se tienen eventos disjuntos cuando la intersección es no nula $A \cap B \neq \varnothing$
- Cuando se calcula la probabilidad de la unión se suman la probabilidad de A más la probabilidad de B pero si la intersección de ambos no es nula, entonces hay que sustraer la probabilidad de la intersección ¡porque se ha sumado ésta dos veces!

Teorema 2.3 (Ley de adición de eventos disjuntos)

Si se tienen dos eventos A y B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Consecuencias de los axiomas

Demostración.

$\forall\, A, B \in \mathcal{F} \subseteq \Omega$ se tiene lo siguiente

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$$

Notemos que $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

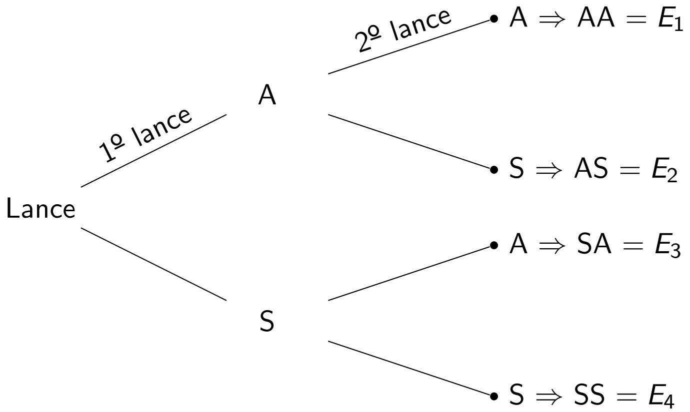
$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$\square$

Ejemplo 1

- Lance una moneda dos veces, se registra éxito (águila) o fracaso (sol).
- Se registran los eventos A para águila y S para sol entonces se tiene el siguiente diagrama



Ejemplo 1

- El espacio muestral está determinado por:

$$\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$$

- El orden en el que se listan los eventos carece de sentido, cualquier otro orden tiene resultados similares.
- Considere el evento de obtener solamente un Águila y llamémosle A. A partir de la lista anterior vemos que solamente los eventos AS (E_2) y SA (E_3) satisfacen este requisito. Entonces el evento a tiene

$$A = \{E_2, E_3\}$$

- El cual obviamente es un subconjunto $\subseteq$ de Ω.

Ejemplo 2

- Supongamos ahora que una caja contiene 50 semillas y que solo 42 pueden desarrollarse (viables) y 8 no se pueden desarrollar (inviables). Entonces el espacio muestral es:

$$\Omega = \{V, I\}$$

- Es decir solo dos eventos son posibles: Viable (V) o Inviable (I).
- Otra forma de denotar esos mismos eventos de forma desarrollada es poner las 42 semillas viables y las 8 inviables de la siguiente manera

$$\Omega = \{\underbrace{E_1, ..., E_{42}}_{\text{Viable}}, \underbrace{E_{43}, ..., E_{50}}_{\text{Inviable}}\}$$

- El subconjunto de Ω que denota los elementos viables son

$$V = \{E_1, ..., E_{42}\} \subseteq \Omega$$

La Probabilidad

- La probabilidad de un evento es el valor numérico que representa la proporción de veces que se espera que este ocurra bajo condiciones idénticas y controladas, denotada por $P(A)$.
- Suponga que un experimento tiene n posibles resultados. Si el evento A se compone de m resultados, la probabilidad de A está dada por:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

- Ejemplo 1: encuentre la probabilidad de obtener exactamente dos águilas en dos lanzamientos de una moneda balanceada.

$$\Omega = \{AA, AS, SA, SS\}$$

- Entonces se tienen 4 posibles resultados, de manera que solo uno de estos eventos tienen exactamente dos águilas y por tanto

$$P(A) = \frac{1}{4} = 0.25$$

Ejemplo 2

- Con relación al ejemplo 2, de las semillas Viables e Inviables. Queremos saber cual es la probabilidad de obtener semillas Inviables

$$\Omega = \{\underbrace{E_1, ..., E_{42}}_{\text{Viable}}, \underbrace{E_{43}, ..., E_{50}}_{\text{Inviable}}\}$$

- Luego entonces

$$P(I) = \frac{8}{50} = 0.16$$

Permutaciones

Definición 3.1

Una permutación se define como la cantidad de formas en que se pueden elegir u ordenar k elementos distintos de un conjunto de n elementos en un orden particular, es decir, la forma de llenar $k \leqslant n$ espacios ordenados

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ejemplo 3

- Tengo las letras A, B, C, D, y quiero saber de cuantas formas puedo ordenar dos de esas letras.
- En este caso, el orden es importante y no representa lo mismo.

$$P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!}$$

- ¿Pero que es el factorial?

$$\frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 4 \cdot 3 = 12$$

- Hay doce formas distintas de ordenar dos letras dadas las cuatro originales.

Combinatronica

Definición 3.2

Sea $\binom{n}{k}$ el número de diferentes subconjuntos con k elementos de un conjunto de n elementos

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ejemplo 3 y 1

- Para el ejemplo tres, las combinaciones de dos letras sin tomar en cuenta el orden se calculan así

$$\frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$$

- Queríamos encontrar la probabilidad de obtener exactamente dos aguilas en dos lanzamientos de una moneda balanceada.
- Podemos calcular $\binom{2}{2}$, el número de formas de obtener dos águilas en dos lanzamientos.

$$\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!(2-2)!} = \frac{2\cdot 1}{2\cdot 0!} = 1$$

- Entonces, la probabilidad se calcula como

$$P(A) = \frac{\binom{2}{2}}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 5

- Tenemos una bolsa que contiene 200 bolas, 100 de ellas son rojas y 100 azules. Selecciona 10 bolas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que 7 sean azules y 3 sean rojas?
- Se tiene que hay $\binom{200}{10}$ resultados, todos igualmente probables
- Esto porque si un experimento tiene dos etapas, con m y n resultados, el experimento tiene mn resultados
- La probabilidad está dada por

$$P(7 \text{ azules y } 3 \text{ rojas}) = \frac{\binom{100}{7}\binom{100}{3}}{\binom{100}{10}} =$$

- **Tarea moral:** calcule esta operación

Las Leyes de la Probabilidad

- Habíamos dicho que la probabilidad de un evento es la suma de las probabilidades de los eventos simples. Sucede que no todos los eventos son sencillos y se requiere de cálculos tediosos.
- Por otro lados, los eventos pueden estar relacionados con otros eventos. Vamos a introducir los conceptos de complemento, unión e intersección.
- Por ejemplo, suponga que se lanza una moneda dos veces y se definen los dos eventos.
- **A:** cae sol en el segundo lanzamiento, o **B:** cae al menos un águila
- Entonces el espacio muestral es

$$\Omega = \{AA, AS, SA, SS\}$$

- Y los eventos son

$$\mathbf{A} = \{AS, SS\} \qquad \mathbf{B} = \{AA, AS, SA\}$$

Las Leyes de la Probabilidad

- Tenemos que

$$\mathbf{A} = \{AS, SS\} \qquad \mathbf{B} = \{AA, AS, SA\}$$

- La unión de los eventos es

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{AS, SS, AA, SA\} = \Omega$$

- La intersección de los eventos es

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{AS\}$$

- El complemento respectivo de los eventos es

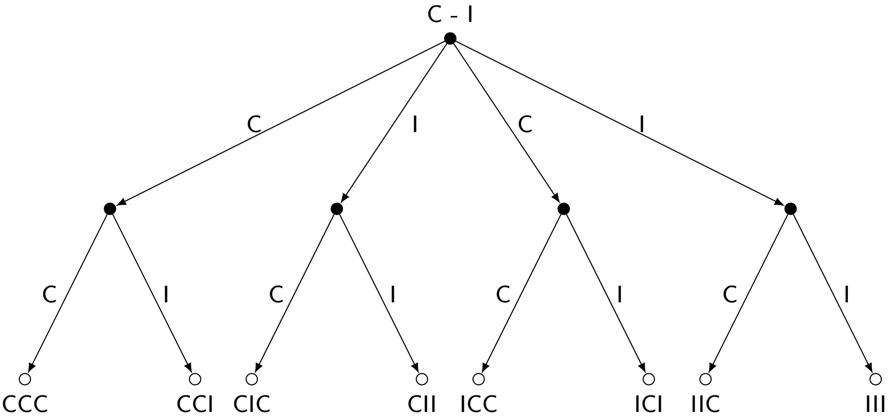
$$\mathbf{A}^c = \{AA, SA\} \qquad \mathbf{B}^c = \{SS\}$$

Tarea Moral

- Calcule los Teoremas 2.2 y 2.3 para el ejemplo anterior

Ejemplo 5

- Existen tres problemas y cada problema puede tiene cierta probabilidad de que sea cierto o falso.
- Si un estudiante no tiene la más minima idea del problema puede estar adivinando.
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un problema correcto?
- Llamemosle a este evento Z
- Denotemos como C la respuesta correcta y con I la incorrecta.



- Podemos solucionar de la siguiente manera el problema

$$P(Z) = 1 - P(Z^c) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0.875$$

Probabilidad condicional

- En algunos casos hemos visto como la probabilidad de un evento depende de la ocurrencia de otro evento.
- Por ejemplo, si estamos interesados en evaluar el riesgo de un deslave de un cerro en cierta zona, dado que han caído lluvias intensas.
- Definimos dos eventos

$$A = \{\text{deslave de un cerro}\} \qquad \text{y} \qquad B = \{\text{llueve intensamente}\}$$

- La probabilidad de ocurrencia de deslave dado que se observa lluvias intensas en esa zona. Es decir, evaluamos la probabilidad de A dada la ocurrencia de B y le llamamos la probabilidad condicional de A dado B y se escribe como $P(A \mid B)$

Probabilidad Condicional

Definición 4.1 (Ley general de la probabilidad condicional)

Sean eventos A y B y suponga que $P(B) > 0$. La probabilidad condicional de A dado B se define como

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidad Condicional

Definición 4.2 (Ley general de la independencia)

Dos eventos A y B se dice que son independientes si alguna de las siguientes identidades se cumple

$$P(A \mid B) = P(A)$$

$$P(B \mid A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

De lo contrario, estos eventos se denotan como dependientes

Probabilidad Condicional

Teorema 4.1

La probabilidad de la intersección de dos eventos A y B es

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$$

Si A y B son independientes

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Demostración.

Se sigue de las dos definiciones anteriores $\square$

Ejemplo 6

	Dx Adicción			
	Alcohol	Cigarro	Marihuana	Total
No Tratam.	3 %	1 %	6 %	10 %
Tratamiento	47 %	29 %	14 %	90 %
Total	50 %	30 %	20 %	100 %

- La probabilidad de No Tratamiento es 10 %
- La probabilidad de recibir tratamiento dado que recibe un Dx de adicción a Mariguana es

$$P(\text{no Tx} \mid \text{Dx Marih.}) = \frac{\text{Proporción no Tx y Recibe Dx Marih.}}{\text{Proporción que recibe Dx Marih.}}$$

Ejemplo 6

- La probabilidad de recibir tratamiento dado que recibe un Dx de adicción a Mariguana es

$$P(\text{no Tx} \mid \text{Dx Marih.}) = \frac{.06}{.20} = .30$$

- La probabilidad se llama probabilidad condicional del evento "no Tx" dado que tiene un diagnóstico de dependencia a la Marihuana.
- Este evento es igual a 30 % de todos los que reciben un diagnóstico de Marihuana no reciben Tratamiento.
- La línea vertical indica la expresión "dado que". Es decir, la probabilidad de no recibir tratamiento dado que tiene un diagnóstico de dependencia a la Marihuana es de 30 %.

Ejemplo 7

- Se colocan en una caja un total de 30 canicas.
- Las canicas son azules y rojas, algunas de ellas son transparentes y otras opacas, de acuerdo a la siguiente tabla

	Canicas		
Color	Transparente	Opaca	Total
Azul	5	15	20
Roja	7	3	10
Total	12	18	30

Ejemplo 7

- Una canica roja:

$$P(R) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

- Una canica transparente:

$$P(T) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

- Una Roja o Transparente:

$$P(R \cup T) = P(R) + P(T) - P(R \cap T) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{7}{30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

- Una canica transparente dado que se sabe que es azul

$$P(T \mid A) = \frac{P(T \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{30}}{\frac{20}{30}} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 8

- Suponga que un impulso eléctrico debe pasar del punto I al II para producir una señal. Para llegar al punto II debe pasar por dos componentes (E_1 y E_2).
- La trayectoria del impulso se interrumpe si falla cualquiera de los componentes. La probabilidad de que el componente E1 no falle es 0.7 y la probabilidad que el componente E_2 no falle es 0.8, además la probabilidad de que al menos uno no falle es 0.94 ¿Cuál es la probabilidad de que la señal se produzca?

$$P(E_1) = 0.7 \qquad P(E_2) = 0.8 \qquad P(E_1 \cup E_2) = 0.94$$

$$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$\Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2)$$

$$= 0.7 + 0.8 - 0.94 = 0.56$$

Independencia

- Recuerde la Definición 4.2
- Ley general de la independencia
- Regresaremos a esta expresión un poco más tarde, por ponemos atención a un hecho importante cuando la probabilidad condicional, $P(A \mid B)$, es igual a la probabilidad no condicional, $P(A)$
- Este es el caso de eventos independientes.
- Esto quiere decir que no importa la condición de evento B, pero la probabilidad condicional no se modifica por la presencia de B.

Teorema de Bayes

- El problema de la probabilidad condicional da lugar a muchas ramificaciones en la inferencia del cálculo de probabilidades. La definición de probabilidad condicional se tiene

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- De donde se obtiene

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) \Rightarrow P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) \Rightarrow P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$$

$$\Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

Ejemplo 9

- Una empresa petrolera planea perforar en una zona donde no se tiene seguridad de que exista petróleo. Los técnicos de acuerdo con su experiencia, creen la posibilidad de que exista petróleo sea de 0.1.
- Se tiene la opción de hacer una prueba preliminar antes de tomar una decisión. La prueba no es concluyente, puesto que hay casos en que da resultados erróneos.
- Si existe petróleo, la prueba es positiva el 90 %, pero aún si no existe petróleo la prueba es positiva el 20 % de las veces. Definamos lo siguiente:
  - A: Existe petróleo; A^c: No existe petróleo; B: La prueba es positiva
  - $P(A) = 0.10$; $P(B \mid A) = 0.90$; $P(B \mid A^c) = 0.20$
  - La probabilidad buscada es $P(A \mid B)$, es decir la probabilidad de que exista petróleo dado que la prueba es positiva. Es decir

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

Ejemplo 9

- En esta expresión la única cantidad que no es conocida es $P(B)$.

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c)$$

$$\Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c)}$$

$$= \frac{(.9)(.1)}{(.9)(.1) + (.2)(.9)} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

- La conclusión es que aunque la prueba resulte positiva la probabilidad de que exista petróleo es muy baja $(\frac{1}{3})$ aunque mayor que la probabilidad anticipada por los técnicos de la empresa.

Ejemplo 9

- Este tipo de probabilidad se le llama a posteriori (porque estamos interesados en evaluar una probabilidad subjetiva).
- Suponga que ahora queremos evaluar $P(A \mid B)$ pero bajo el supuesto de que $P(A) = 0.4$.

$$\Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c)}$$

$$= \frac{(.9)(.4)}{(.9)(.4) + (.2)(.9)} = \frac{2}{3}$$

Teorema 4.2

Sean $\{B_1, ..., B_n\}$ particiones de Ω disjuntas tales que $B_1 \cup ... \cup B_n = \Omega$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $P(B_i) > 0 \; \forall \; i = 1, ..., n \Rightarrow \; \forall \; A \in \mathcal{F} \subseteq \Omega \Rightarrow$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)$$

Demostración.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i) = P(A \cap B_1) + ... + P(A \cap B_n)$$

$$= P((A \cap B_1) \cup ... \cup (A \cap B_n)) = P(A \cap (B_1 \cup ... \cup B_n)) = P(A \cap \Omega) = P(A)$$

$\square$

Teorema de Bayes

Teorema 4.3 (Teorema de Bayes)

Sean $\{B_1, ..., B_n\}$ particiones de Ω disjuntas tales que $B_1 \cup, ..., \cup B_n = \Omega$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $P(B_i) > 0 \, \forall \, i = 1, ..., n \Rightarrow \, \forall \, A \in \mathcal{F} \subseteq \Omega \Rightarrow$

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)}$$

Un evento B_j se llama hipótesis, $P(B_j)$ se llama probabilidad a priori, y $P(B_j|A)$ es una probabilidad a posteriori.

Ejemplo 10

- El Dr. Z tiene tres secretarias con diferentes niveles de competencia, Las secretarias son S_1 , S_2 y S_3 . La secretaria S_1 ha escrito 20 % de un trabajo, S_2 un 40 % y obviamente S_3 el 40 % restante.
- Hay un error en la captura de la información y el profesor conoce que S_1 tiene un 90 % de posibilidad de cometer un error en la escritura, S_1 un 40 % y S_1 nunca comete errores.
- Si se encuentra con un error en el trabajo ¿cuáles es la probabilidad de que éste haya sido escrito por S_1, por S_2, y por S_3 ?
  - Se nos dice que $P(S_1) = .2$; $P(S_2) = .4$; $P(S_3) = .4$
  - Además se sabe que $P(E \mid S_1) = 0.9$; $P(E \mid S_2) = 0.4$; $P(E \mid S_3) = 0.$
  - Entonces el Teorema de Bayes establece que

$$P(S_i \mid E) = \frac{P(E \mid S_i)P(S_i)}{P(E)} \qquad i = 1, 2, 3$$

Ejemplo 10

- Pero

$$P(E) = \sum_{i=1}^{3} P(E \mid S_i) = (.9)(.2) = (.4)(.4) = (0)(.4) = 0.34$$

- Por tanto

$$P(S_1 \mid E) = \frac{P(E \mid S_1)P(S_1)}{P(E)} = \frac{(.9)(.2)}{0.34} = \frac{9}{17}$$

$$P(S_2 \mid E) = \frac{P(E \mid S_2)P(S_2)}{P(E)} = \frac{(.4)(.4)}{0.34} = \frac{8}{17}$$

$$P(S_3 \mid E) = \frac{P(E \mid S_3)P(S_3)}{P(E)} = \frac{(0)(.4)}{0.34} = 0$$

- Nótese que la información a posteriori son diferentes que las probabilidades a priori.

Bibliografía

Bernoulli, J. (1713). *Ars coniectandi*. Impensis Thurnisiorum, fratrum.

Bhattacharyya, G. K., y Johnson, R. A. (1977). *Statistical concepts and methods*. Wiley.

Bickel, P. J., y Doksum, K. A. (2015). *Mathematical statistics: basic ideas and selected topics, volumes i-ii package*. CRC Press.

Fair, R. C. (1978). A theory of extramarital affairs. *Journal of political economy*, *86*(1), 45–61.

Groeneveld, R. A. (1998). A class of quantile measures for kurtosis. *The American Statistician*, *52*(4), 325–329.

Wackerly, D., Mendenhall, W., y Scheaffer, R. L. (2014). *Mathematical statistics with applications*. Cengage Learning.

¡Gracias por su atención!