Algebra Lineal

Matías Carrasco y Victor Ortega
Facultad de Economía, UNAM

26 de septiembre de 2024

Índice general

Capítulo 1

Espacios Vectoriales

1.1. Preámbulo

Las siguientes son notas de clase sobre el tema de Algebra lineal, combinando recursos del curso de Cálculo Diferencial e Integral III del M. en C. Francisco Giovanni López Sánchez, y del curso de Algebra Lineal I del Dr. Leobardo Fernandez Román, ambos impartidos en la Facultad de Ciencias de la UNAM, en el semestre 2024-1 y 2024-2 respectivamente.

1.2. Definición y Ejemplos

Definición 1.1 (Campo). Un campo es un conjunto $\mathbb{K}$ con dos operaciones binarias en $\mathbb{K}$, llamadas suma y multiplicación

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ (a, b) &\to a + b \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ (a, b) &\to a \cdot b \end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades

($\mathbb{K}_1$) $\forall\, a, b \in \mathbb{K} \Rightarrow a + b \in \mathbb{K}$ — Cerradura de la Suma

($\mathbb{K}_2$) $\forall\, a, b \in \mathbb{K} \Rightarrow a + b = b + a$ — Conmutatividad

($\mathbb{K}_3$) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{K} \Rightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$ — Asociatividad

($\mathbb{K}_4$) $\exists\, 0 \in \mathbb{K} \ni \forall\, a \in \mathbb{K} \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a$ — Neutro Aditivo

($\mathbb{K}_5$) $\forall\, a \in \mathbb{K}\, \exists\, (-a) \in \mathbb{K} \ni a + (-a) = (-a) + a = 0$ — Inverso Aditivo

($\mathbb{K}_6$) $\forall\, a, b \in \mathbb{K} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{K}$ — Cerradura del Producto

($\mathbb{K}_7$) $\forall\, a, b \in \mathbb{K} \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$ — Conmutatividad

($\mathbb{K}_8$) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{K} \Rightarrow a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ — Asociatividad

($\mathbb{K}_9$) $\exists\, 1 \in \mathbb{K} \ni \forall\, a \in \mathbb{K} \Rightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ — Neutro Multiplicativo

($\mathbb{K}_{10}$) $\forall\, a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\, \exists\, a^{-1} \in \mathbb{K} \ni a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ — Inverso Multiplicativo

($\mathbb{K}_{11}$) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{K} \Rightarrow a \cdot (b + c) = ab + ac$ — Distributivo I

($\mathbb{K}_{12}$) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{K} \Rightarrow (a+b)\cdot c = ac + ac$ Distributivo II

Observación. Un ejemplo de un campo es $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{Q}$, etc.

Notación. Una variable x se denota como vector de esta forma $\vec{x}$

Definición 1.2 (Espacio Vectorial)**.** Un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{K}$ es un conjunto de elementos donde están bien definidas las operaciones de **suma vectorial** y **multiplicación escalar**. Denotamos a todos los elementos de V como vectores y a todos los elementos de $\mathbb{K}$ escalares $\ni$

$$+ : V \times V \to V \qquad\qquad \cdot : V \times \mathbb{K} \to V$$

que cumple las siguientes propiedades

($\oplus_1$) $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in V$ Cerradura de la Suma

($\oplus_2$) $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ Conmutatividad

($\oplus_3$) $\forall\, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in V \Rightarrow (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{z} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{z})$ Asociatividad

($\oplus_4$) $\exists\, \vec{0} \in V \ni \forall\, \vec{v} \in \mathbb{K} \Rightarrow \vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$ Neutro Aditivo

($\oplus_5$) $\forall\, \vec{v} \in V\ \exists\, \vec{x} \in V \ni \vec{v} + \vec{x} = \vec{x} + \vec{v} = \vec{0}$ Inverso Aditivo

($\odot_1$) $\forall\, \vec{v} \in V$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{v} \in V$ Cerradura del Producto

($\odot_2$) $\forall\, \vec{v} \in V$ y $\forall\, \lambda, \gamma \in \mathbb{K} \Rightarrow (\lambda \cdot \gamma) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\gamma \cdot \vec{v})$ Asociatividad

($\odot_3$) $\exists\, 1 \in \mathbb{K} \ni \forall\, \vec{v} \in V \Rightarrow 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ Neutro Multiplicativo

(D_1) $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}$ Distributivo I

(D_2) $\forall\, \vec{v} \in V$ y $\forall\, \lambda, \gamma \in \mathbb{K} \Rightarrow \vec{v} \cdot (\lambda + \gamma) = \vec{v} \cdot \lambda + \vec{v} \cdot \gamma$ Distributivo I

Teorema 1.1 (Ley de la Cancelación)**.** $\forall\, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in V$, con V sobre un campo $\mathbb{K}$, si $\vec{v} + \vec{z} = \vec{w} + \vec{z} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$

Proof. Sean $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in V$ P.D. Teorema 1.1. Como $\vec{z} \in V \Rightarrow$

$$\exists\, \vec{x} \in V \ni \vec{z} + \vec{x} = \vec{x} + \vec{z} = \vec{0}$$

Utilizando esto mismo, tenemos que

$$\vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v} + (\vec{x} + \vec{z}) = (\vec{v} + \vec{x}) + \vec{z} = (\vec{w} + \vec{x}) + \vec{z} = \vec{w} + (\vec{x} + \vec{z}) = \vec{w} + \vec{0} = \vec{w}$$

$\therefore$ Teorema 1.1 es verdadero. $\square$

Corolario. El vector aditivo mencionado en ($\oplus_4$) es único.

Proof. Sean $\vec{0}_1$ y $\vec{0}_2 \in V$ y $\vec{v} \in V$ arbitrario $\ni$

$$\vec{v} + \vec{0}_1 = \vec{v} \qquad \text{y} \qquad \vec{v} + \vec{0}_2 = \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{v} + \vec{0}_1 = \vec{v} + \vec{0}_2 \Rightarrow \vec{0}_1 = \vec{0}_2$$

$\square$

Corolario. El inverso aditivo mencionado en $(\oplus_4)$ es único

Proof. Sea $\vec{v} \in V$ arbitrario. Supongamos que $\exists\, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in V \ni$

$$\vec{v} + \vec{w}_1 = \vec{0}_V = \vec{v} + \vec{w}_2$$

Por el Teorema 1.1 $\Rightarrow \vec{w}_1 = \vec{w}_2$ $\square$

Teorema 1.2. En cualquier espacio vectorial V, los siguientes enunciados se cumplen

a) $\forall\, \vec{v} \in V \Rightarrow 0 \cdot \vec{v} = 0$

b) $\forall\, \vec{v} \in V$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow (-\lambda)\vec{v} = -(\lambda\vec{v})$

c) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow 0 \cdot \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Proof.

a) Sea $\vec{v} \in V$ P.D. Teorema 1.2

$$0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v} = (0+0)\vec{v} = 0 \cdot \vec{v} + 0$$

Por Teorema 1.1 $\Rightarrow 0 \cdot \vec{v} = 0$

b) Sabemos por $(\oplus_5)$ que cada vector $\in V$ tiene inverso $\Rightarrow \exists$ un único elemento $-(\lambda \cdot \vec{v}) \ni$

$$\lambda \cdot \vec{v} + (-(\lambda \cdot \vec{v})) = \vec{0} \tag{1.1}$$

Por otro lado, s.t.q.

$$\lambda \cdot \vec{v} + (-\lambda)\vec{v} = (\lambda + (-\lambda))\vec{v}$$

Como $(\lambda + (-\lambda)) \in \mathbb{K}$, sabemos que

$$(\lambda - \lambda)\vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \lambda\vec{v} + (-\lambda)\vec{v} = \vec{0} \tag{1.2}$$

Por (1.1) y (1.2) s.t.q.

$$\lambda\vec{v} + (-(\lambda\vec{v})) = \lambda\vec{v} + (-\lambda)\vec{v} \Rightarrow -(\lambda\vec{v}) = (-\lambda)\vec{v}$$

c) Sea $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \cdot \vec{0} + \lambda \cdot \vec{0} = \lambda(\vec{0} + \vec{0}) = \lambda(\vec{0}) = \lambda \cdot \vec{0} + \vec{0} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

$\square$

Definición 1.3 (Subespacio Vectorial)**.** Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $W \subseteq V$. Se dice que W es subespacio vectorial de V si $(W, + \restriction_W, \cdot \restriction_W)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Notación. Si W es subespacio de V, lo denotamos como $W \leq V$

Notación. $(+\restriction_W)$ es la operación de la suma en V restringida a W. $(\cdot\restriction_W)$ es el producto.

Ejemplo 1.1. Sea $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas.

$$\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} \qquad \text{y} \qquad \lambda\mathbf{A}_{ij} = (\lambda\mathbf{A})_{ij}$$

Sea

$$W = \{\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\}$$

Demostremos que $W \leq V$

Proof. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T \Rightarrow \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T$ la ij-ésima entrada de $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$. Sea $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ la ji-ésima entrada.

$$\mathbf{C}_{ij} = (a + b)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) = (a + b)_{ji} = \mathbf{C}_{ji}$$

□

Teorema 1.3. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-ésimo espacio vectorial y $W \subseteq V \Rightarrow (W, + \restriction_W, \cdot\restriction_W)$ es un subespacio vectorial de $V \Leftrightarrow$ se cumplen

I) $\vec{0}_V \in W$ — Cero en Subespacio

II) $\forall\, \vec{v}, \vec{u} \in W \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \in W$ — Cerrado Bajo Suma

III) $\forall\, \vec{v} \in W$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{v} \in W$ — Cerrado Bajo Producto

Proof. $\Rightarrow$

Supongamos que W es subespacio de $V \Rightarrow (W, + \restriction_W, \cdot\restriction_W)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. En particular, $(W, + \restriction_W, \cdot\restriction_W)$ satisface $(\oplus_1)$, $(\odot_1)$, y $(\oplus_4)$. $\Rightarrow$, se satisfacen i), y ii) y $\exists 0^* \in W \ni$

$$0^* + \vec{w} = \vec{w} + 0^* = \vec{w}\ \forall\, \vec{w} \in W$$

Como

$$\vec{0}_V + \vec{w} = \vec{w} + \vec{0}_V = \vec{w}\ \forall\, \vec{w} \in W \Rightarrow 0^* = \vec{0}_V \in W$$

$\Leftarrow$

Supongamos que W satisface i), ii), y iii)

$(\oplus_1)$ Por ii)

$(\oplus_2)$ Se hereda de V

$(\oplus_3)$ Se hereda de V

$(\oplus_4)$ Por i)

($\oplus_5$) Sea $\vec{w} \in W \Rightarrow (-1)\vec{w} \in W \Rightarrow (-\vec{w}) \in W$

($\odot_1$) Por iii)

($\odot_2$) Se hereda de V

($\odot_3$) Se hereda de V

(D_1) Se hereda de V

(D_2) Se hereda de V

□

Teorema 1.4. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-ésimo espacio vectorial y $W \subseteq V \Rightarrow (W, + \restriction_W, \cdot \restriction_W)$ es un subespacio vectorial de $V \Leftrightarrow$ se cumplen

I) $W \neq \varnothing$ Diferente del Vacío

II) $\forall\, \vec{v}, \vec{u} \in W \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \in W$ Cerrado Bajo Suma

III) $\forall\, \vec{v} \in W$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{v} \in W$ Cerrado Bajo Producto

1.3. Combinaciones Lineales

Definición 1.4 (Combinación Lineal)**.** Sean $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un conjunto no vacío de vectores de V. Una combinación lineal de elementos de S es un vector de la forma

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_1 + ... + ... + \lambda_n \vec{v}_1$$

donde $\vec{v}_i \in S, \lambda_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}$

Observación. Las combinaciones lineales son finitas

Teorema 1.5. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un conjunto no vacío de vectores de $V \Rightarrow$ el conjunto

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \vec{v}_i \mid \vec{v}_i \in S, \lambda_i \in \mathbb{K}, i \in \{1, ...n\}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

de todas las combinaciones lineales de vectores de S es un subespacio de V

Lema 1.1. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean W_1 y W_2 subespacios de $V \Rightarrow W_1 \cap W_2$ es un subespacio de V

Proof. I) Veamos que $\vec{0}_V \in W_1 \cap W_2$

Como $W_1 \leq V$ y $W_2 \leq V \Rightarrow \vec{0}_V \in W_1$ y $\vec{0}_V \in W_2$

$$\Rightarrow \vec{0}_V \in W_1 \cap W_2$$

II) y iii) Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2 \in W_1 \cap W_2$

Notemos que la combinación lineal $(\lambda\vec{w}_1 + \vec{w}_2) \in W_1 \cap W_2$

Notemos que

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W_1 \qquad \text{y} \qquad \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W_2$$
$$\Rightarrow \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W_1 \cap W_2$$

Además

$$\lambda\vec{w}_1 \in W_1 \qquad \text{y} \qquad \lambda\vec{w}_1 \in W_2$$
$$\lambda\vec{w}_1 \in W_1 \cap W_2$$

$\therefore W_1 \cap W_2$ es un subespacio de V

$\square$

Observación. Ahora podemos probar el Teorema 1.5

Proof. I) Sea $\vec{u} \in S$ arbitrario y $\lambda = \vec{0}$

$$\lambda\vec{u} = 0 \cdot \vec{u} = \vec{0} \in \langle S \rangle$$

II) Sea, $\vec{u}, \vec{w} \in S$ arbitrarios

$$\Rightarrow \exists\, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in \langle S \rangle$$

$$\exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \ni \vec{u} = \lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_n\vec{v}_n \quad \text{y} \quad \exists\, \mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K} \ni \vec{w} = \mu_1\vec{v}_1 + ... + \mu_n\vec{v}_n$$
$$\Rightarrow \vec{u} + \vec{w} = (\lambda_1 + \mu_1)\vec{v}_1 + ... + (\lambda_n + \mu_1)\vec{v}_n \in \langle S \rangle$$

III) Sean $\vec{u} \in \langle S \rangle$ y $\eta \in \mathbb{K}$

$$\exists\, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \qquad \text{y} \qquad \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \ni \vec{u} = \lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_n\vec{v}_n$$
$$\eta \cdot \vec{u} = \eta(\lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_n\vec{v}_n) = (\eta \cdot \lambda_1)\vec{v}_1 + ... + (\eta \cdot \lambda_n)\vec{v}_n \in \langle S \rangle$$

$\square$

1.4. Conjunto Generado

Definición 1.5 (Conjunto generado)**.** El conjunto $\langle S \rangle$ es el subespacio generado por S

Definición 1.6. Si $\langle S \rangle = V$ se dice que S genera a V

Teorema 1.6. Sean $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $W \subseteq V \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n \in W$$

$\forall\, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in W$ y $\forall\, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$

Proof. La prueba se hace por inducción sobre n

1. $n = 1$ Sea $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ y $\vec{v}_1 \in W$

   Por el Teorema 1.3, en particular el inciso iii) $\Rightarrow \lambda_1 \vec{v}_1 \in W$

2. $n = 2$ Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ y $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W$

   Por el Teorema 1.3, en particular el inciso iii) $\Rightarrow \lambda_1 \vec{v}_1 \in W$ y $\lambda_2 \vec{v}_2 \in W$

   Por el inciso ii) $\Rightarrow \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 \in W$

3. Supongamos cierto el resultado para $n = k$

4. Sean $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1} \in W$ y $\lambda_1, ..., \lambda_k, \lambda_{k+1} \in \mathbb{K}$

   Veamos que

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_k \vec{v}_k + \lambda_{k+1} \vec{v}_{k+1} = (\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_k \vec{v}_k) + \lambda_{k+1} \vec{v}_{k+1}$$

   Por el supuesto que el resultado es cierto en $n = k$, la combinación lineal dentro del paréntesis $\in W$. El término restante también $\in W$, por el inciso ii) del Teorema 1.3

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_k \vec{v}_k + \lambda_{k+1} \vec{v}_{k+1} \in W$$

$\square$

Teorema 1.7. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un conjunto no vacío de vectores de V. Si W es un subespacio de $V \ni S \subseteq W \Rightarrow \langle S \rangle \subseteq W$

Proof. Sea $\vec{u} \in \langle S \rangle \Rightarrow$

$$\exists\, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_n \quad \text{y} \quad \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \ni \vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + ... + \lambda_n \vec{u}_n$$

$$\Rightarrow \vec{u}_1, ..., \vec{u}_n \in W \Rightarrow \vec{u} \in W$$

$\square$

Corolario. $\langle S \rangle$ es el subespacio más chico que contiene al conjunto S

Proof. Para ver esta nota, supongamos que $W \leq V$ y $S \subseteq W$ P.D. $\langle S \rangle \subseteq W$

Sea $\vec{z} \in \langle S \rangle \Rightarrow \exists\, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in S$ y $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \ni$

$$\vec{z} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i$$

Como $S \subseteq W \Rightarrow \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in W$ $\square$

Definición 1.7 (Dependencia Lineal)**.** Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un conjunto no vacío de vectores en V. Se dice que S es linealmente dependiente (l.d.) si $\exists \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in S$ y escalares no todos cero $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \ni$

$$\vec{0}_V = \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n$$

Definición 1.8 (Independencia Lineal)**.** Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un conjunto no vacío de vectores en V. Se dice que S es linealmente independiente (l.i.) si $\forall\, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in S \Rightarrow$

$$\vec{0}_V = \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0 \in \mathbb{K}$$

Definición 1.9 (Clase lateral)**.** Sea W un subespacio de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. $\Rightarrow \forall \vec{v} \in V$ el conjunto

$$\vec{v} + W := \{\vec{v} + \vec{w} \mid \vec{w} \in w\}$$

Se llama la clase lateral de W que contiene a $\vec{v}$, donde este último es el representante del espacio vectorial.

Teorema 1.8. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. y $W \leq V \Rightarrow$

$$\vec{v} + W \leq V \Leftrightarrow \vec{v} \in W$$

Proof. $\Leftarrow$ Spongamos que $\vec{v} \in W$

Nos referimos al Teorema 1.4

i) Como $\vec{v} \in W \Rightarrow -\vec{v} \in W \Rightarrow \vec{v} + (-\vec{v}) \in W \Rightarrow \vec{0}_V \in W$

ii) Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\vec{v} + \vec{w}_1 \in \vec{v} + W$ y $\vec{w}_2 \in \vec{v} + W$

Notemos que

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{v} \in W \Rightarrow \vec{v} + (\vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{v}) \in \vec{v} + W$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned} \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}_1 + \vec{0}_V &= \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}_1 + \vec{v} - \vec{v} \\ &= \vec{v} + (\lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}_1 - \vec{v}) \in \vec{v} + W \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Supongamos que $\vec{v} + W \leq V$

Como $\vec{v} + W$ es un subespacio contiene a $\vec{0} \Rightarrow \exists\, \vec{w} \in \vec{v} + W \ni \vec{v} + \vec{w} = 0$

$\Rightarrow -\vec{v} \in W$ Como $\vec{v} + W$ es un subespacio $\Rightarrow \forall\, \vec{w} \in \vec{v} + W$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{w} \in \vec{v} + W$

$\Rightarrow$ con $\lambda = -1 \Rightarrow (-1) \cdot -\vec{v} \in \vec{v} + W$

$\therefore \vec{v} \in W$ $\square$

Teorema 1.9. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. y $W \leq V$. Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \Rightarrow$

$$\vec{v}_1 + W = \vec{v}_2 + W \Leftrightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in W$$

Proof. $\Rightarrow$

Supongamos que $\vec{v}_1 + W = \vec{v}_2 + W$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \vec{0}_V \in W \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{0}_V \in \vec{v}_1 + W = \vec{v}_2 + W \\
&\Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{0}_V \in \vec{v}_2 + W \Rightarrow \vec{v}_1 \in \vec{v}_2 + W \\
&\Rightarrow \exists\, \vec{w} \in W \ni \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{w} \in \vec{v}_2 + W \\
&\Rightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{w} \in W
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Supongamos que $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in W$

Sea $\vec{w}_* = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$

$\subseteq$ Sea $\vec{x} \in \vec{v}_1 + W \Rightarrow \vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{w}_1$ para algún $\vec{w}_1 \in W \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{w}_* + \vec{v}_2$

$$\Rightarrow \vec{x} = \vec{w}_* + \vec{v}_2 + \vec{w}_1 \Rightarrow \vec{v}_2 + (\vec{w}_* + \vec{w}_1) \in W \Rightarrow \vec{x} \in \vec{v}_2 + W$$

$\supseteq$ Análogamente sea $\vec{y} \in \vec{v}_2 + W \Rightarrow \vec{y} = \vec{v}_2 + \vec{w}_{**} \in W$

$$\vec{y} = \vec{v}_1 - \vec{w}_* + \vec{w}_{**} = \vec{v}_1 + (\vec{w}_{**} - \vec{w}_*) \Rightarrow \vec{y} \in \vec{v}_1 + W$$

□

Definición 1.10. Si $\langle S \rangle = V$, se dice que S genera a V o que S es un conjunto generador de V

Ejemplo 1.2. En el espacio vectorial de $V = \mathbb{R}^2$, defina a un subconjunto de V como

$$S = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

Es claro ver que S genera a $V = \mathbb{R}^2$

Teorema 1.10. Sean $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S_1, S_2 \subseteq V$ subconjuntos $\ni S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow$

1. $\langle S_1 \rangle \subseteq \langle S_2 \rangle$. Así, si S_1 genera a $V \Rightarrow S_2$ genera a V
2. Si S_1 es linealmente dependiente $\Rightarrow S_2$ es l.d.
3. Si S_2 es linealmente independiente $\Rightarrow S_1$ es l.i.

Proof.
1. Sea $\vec{v} \in \langle S_1 \rangle \Rightarrow \exists \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in S_1$ y escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \ni \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_1 \vec{v}_n$

   Pero $S_1 \subseteq S_2$, así $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_1 \vec{v}_n$ es una combinación lineal de elementos de $S_2 \Rightarrow \vec{v} \in \langle S_2 \rangle$
2. Se sigue de la siguiente demostración, ya que $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$
3. Supongamos que S_2 es l.i. Veamos que S_1 también es l.i.

Sea $\vec{0}_V = \lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_1\vec{v}_n$ con $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in S_1$ y $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$

Como $S_1 \subseteq S_1 \Rightarrow \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in S_2$

Nótese que se tiene una combinación lineal de elementos en S_2. Por hipótesis, S_2 es l.i. Esto implica $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0 \Rightarrow S_1$ es l.i. porque de ahí es que se tomó la combinación lineal.

□

Teorema 1.11. Sean $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un conjunto l.i. de vectores de V y $\vec{v} \in V \setminus S = V_2 \Rightarrow$

$$\vec{v} \in \langle S \rangle \Leftrightarrow S \cup \{\vec{v}\} \text{ es l.d.}$$

Proof. $\Rightarrow$ Supongamos que $\vec{v} \in \langle S \rangle \Rightarrow \exists\, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in S$ y escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \ni \vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_n\vec{v}_n$

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_n\vec{v}_n \Rightarrow \vec{0}_V = \lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_n\vec{v}_n + (-1)\vec{v}$$

Como lo anterior es una combinación lineal de elementos de $S \cup \{\vec{v}\}$ que fue iguala a $\vec{0}_V$ donde no todos los escalares son 0. $S \cup \{\vec{v}\}$ es l.d.

$\Leftarrow$ Supongamos que $S \cup \{\vec{v}\}$ es l.d. $\Rightarrow \exists\, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_n \in S \cup \{\vec{v}\}$ y escalares $\eta, ..., \eta_n \in \mathbb{K}$ no todos cero $\ni \vec{0}_V = \eta_1\vec{w}_1 + ... + \eta_n\vec{w}_n$

Algún $\vec{w}_i$ es $\vec{v}$, porque de lo contrario, sería un conjunto l.i. si $\forall\, i = 1, ..., n \Rightarrow \vec{w}_i \neq \vec{v}$, ya que es una combinación lineal de elementos de S que es igual a cero, y por hipótesis este conjunto es l.i. Sin pérdida de generalidad, supongamos que es $\vec{w}_1$

$$\vec{0}_V = \eta_1\vec{v} + ... + \eta_n\vec{w}_n \Rightarrow -\eta_1\vec{v} = \eta_2\vec{w}_2 + ... + \eta_n\vec{w}_n \Rightarrow \vec{v} = -\frac{\eta_2}{\eta_1}\vec{w}_2 - ... - \frac{\eta_n}{\eta_1}\vec{w}_n$$

Pero esta es una combinación lineal de elementos en $S \Rightarrow \vec{v} \in \langle S \rangle$ □

Teorema 1.12. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $\vec{x}, \vec{y} \in V$ no nulos $\Rightarrow \{\vec{x}, \vec{y}\}$ son l.d. $\Leftrightarrow \vec{x}$ o $\vec{y}$ es múltiplo del otro

Proof. $\Rightarrow$ Supongamos que $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ son l.d. Esto sucede para cada combinación lineal del vector $\vec{0}_V$ con $\vec{x}$ y $\vec{y}$, por lo que algún escalar es distinto de cero. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \vec{0}_V \Rightarrow \lambda \neq 0 \text{ o } \mu \neq 0$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\lambda \neq 0$

$$\frac{\lambda}{\lambda}\vec{x} + \frac{\mu}{\lambda}\vec{y} = \vec{0}_V \Rightarrow \vec{x} + \frac{\mu}{\lambda}\vec{y} = \vec{0}_V \Rightarrow \vec{x} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{y}$$

$\Leftarrow$ Suponga que $\vec{x}$ o $\vec{y}$ es múltiplo del otro. Es decir, $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\vec{x} - \vec{x} = \lambda\vec{y} - \vec{x} \Rightarrow \vec{0}_V = \lambda\vec{y} - \vec{x} = \lambda\vec{y} + (-1)\vec{x}$$

Pero este es una combinación lineal igual a 0 con no todos los escalares cero, $\{\vec{x}.\vec{y}\}$ es l.d..
$\therefore$ Teorema 1.12 es verdadero. □

Teorema 1.13. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $\vec{x}, \vec{y} \in V$. $\Rightarrow$ $\{\vec{x}.\vec{y}\}$ son l.i. $\Leftrightarrow$ $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \neq 0 \Rightarrow \{\lambda\vec{x}, \mu\vec{y}\}$ es l.i.

Proof. $\Rightarrow$ Suponga que $\{\vec{x}.\vec{y}\}$ es l.i.

$$\Rightarrow\ \forall\, \alpha_1, ..., \alpha_2 \in \mathbb{K} \ni \alpha_1\vec{x} + \alpha_2\vec{y} = \vec{0}_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Sean $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$ y sea

$$\beta_1(\lambda\vec{x}) + \beta_2(\mu\vec{y}) = \vec{0}_V \Rightarrow (\beta_1\lambda)\vec{x} + (\beta_2\mu)\vec{y} = \vec{0}_V$$

$$\beta_1 \cdot \lambda = 0 \qquad \text{y} \qquad \beta_2 \cdot \mu = 0$$

Por hipótesis supusimos $\lambda, \mu \in \mathbb{K} \neq 0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 0$

$\Leftarrow$ Suponga que $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \neq 0 \Rightarrow \{\lambda\vec{x}, \mu\vec{y}\}$ es l.i.

$$\forall\, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{K} \Rightarrow \eta_1(\lambda\vec{x}) + \eta_2(\mu\vec{y}) = \vec{0}_V \Rightarrow \eta_1 = \eta_2 = 0$$
$$\Rightarrow (\eta_1\lambda)\vec{x} + (\eta_2\mu)\vec{y} = \vec{0}_V \Rightarrow (0 \cdot \lambda)\vec{x} + (0 \cdot \mu)\vec{y} = \vec{0}_V$$

Pero esta combinación lineal solo se puede si $\{\vec{x}.\vec{y}\}$ es l.i. $\square$

Teorema 1.14. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $W_1 \leq V$ y $W_2 \leq V$ subespacios de V. Demuestre que $W_1 \cup W_2 \leq V \Leftrightarrow W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$

Proof. $\Leftarrow$

Supongamos que $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$ P.D. $W_1 \cup W_2 \leq V$

$$\Rightarrow W_1 = W_1 \cup W_2 \qquad \text{o} \qquad W_2 = W_1 \cup W_2$$

Como $W_1 \leq V$ y $W_2 \leq V \Rightarrow W_1 \cup W_2 \leq V$

$\Rightarrow$

Supongamos que $W_1 \cup W_2 \leq V$ P.D. $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$. Ahora, supongamos que $W_2 \nsubseteq W_1$ P.D. $W_1 \subseteq W_2$

Sea $\vec{v} \in W_1$. Como $W_2 \nsubseteq W_1 \Rightarrow \exists\, \vec{w} \in W_2 \ni \vec{w} \notin W_1$. Por definición de $\cup$ s.t.q.

$$\Rightarrow \vec{v} \in W_1 \subseteq W_1 \cup W_2 \qquad \text{y} \qquad \vec{w} \in W_2 \subseteq W_1 \cup W_2$$

Como $W_1 \cup W_2 \leq V$ subespacio s.t.q.

$$\vec{v} + \vec{w} \in W_1 \cup W_2$$

$$\Rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in W_1 \qquad \text{o} \qquad \vec{v} + \vec{w} \in W_2$$

Note que, como W_1 es un subespacio s.t.q.

$$(\vec{v} + \vec{w}) + (-\vec{v}) \in W_1$$

Pero esto, por hipótesis, es imposible, por lo tanto s.t.q. $\vec{v}+\vec{w} \in W_2$

$$\Rightarrow (\vec{v}+\vec{w})+(-\vec{w}) \in W_2$$
$$\Rightarrow \vec{v} \in W_2$$

$\therefore$ como $\vec{v}$ arbitrario $W_1 \subseteq W_2$

Sin perdida de generalidad, la prueba para $W_2 \subseteq W_1$ es análoga. Cuando $W_2 = W_1$ la demostración es trivial. □

Teorema 1.15. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un conjunto no vacío de vectores de V. Demuestre que

$$\langle S \rangle = \cap \{W \mid W \leq V \ni S \subseteq W\}$$

Proof. $\subseteq$ Por el corolario del Teorema 1.7, sabemos que $\langle S \rangle$ es el subespacio más chico quecontiene al conjunto, por lo que es uno de los conjuntos W

$\supseteq$ Sea $\vec{v} \in \cap \{W \mid W \leq V \ni S \subseteq W\}$ Por lo que $\vec{v}$ pertenece a cada subespacio de V que contiene a S. Pero $\langle S \rangle$ es uno de estos subespacios. $\Rightarrow \vec{v} \in \langle S \rangle$

$$\Rightarrow \cap \{W \mid W \leq V \ni S \subseteq W\} \subseteq \langle S \rangle$$

$\therefore \langle S \rangle = \cap \{W \mid W \leq V \ni S \subseteq W\}$

□

1.5. Bases y Dimensión

Definición 1.11 (Bases). Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Un conjunto β es base de V si β es l.i. y $\langle \beta \rangle = V$

Teorema 1.16. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\beta \subseteq V$ un conjunto vectores de $V \Rightarrow \beta$ es base de $V \Leftrightarrow \forall \vec{u} \in V$ se tiene que, se escribe de forma única como combinación lineal de elementos de β

Proof. $\Rightarrow$

Supongamos que β es base de V. $\Rightarrow \langle \beta \rangle = V$ y $\forall \vec{u} \in V$ se tiene que es combinación lineal de elementos de β. Sea $\vec{u} \in V$

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n \qquad \text{y} \qquad \vec{u} = \eta_1 \vec{v}_1 + ... + \eta_n \vec{v}_n$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n = \eta_1 \vec{v}_1 + ... + \eta_n \vec{v}_n$$
$$\Rightarrow \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n - \eta_1 \vec{v}_1 - ... - \eta_n \vec{v}_n = \vec{0}_V$$
$$\Rightarrow (\lambda_1 - \eta_1)\vec{v}_1 + ... + (\lambda_n - \eta_n)\vec{v}_n = \vec{0}_V$$

Como β es l.i. $\Rightarrow$

$$\lambda_1 - \eta_1 = ... = \lambda_n - \eta_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \eta_1 = ... = \lambda_n = \eta_n$$

Así, $\vec{u}$ se escribe de forma única

$\Leftarrow$

Supongamos que cada vector $\vec{u} \in V$ se escribe de forma única como combinación lineal de elementos de $\beta \Rightarrow$ como cada vector $\vec{u} \in V$ se escribe de forma única como combinación lineal de elementos de $\beta \Rightarrow \beta$ genera a V. Ahora, como es única $\Rightarrow$

$$\vec{0}_V = 0\vec{v}_1 + ... + 0\vec{v}_n$$
$$\Rightarrow \vec{0}_V = \lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_n\vec{v}_n \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$$

$\therefore$ el Teorema 1.16 es verdadero $\square$

Teorema 1.17. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un conjunto de vectores de V. Donde $S = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\} \Rightarrow S$ es l.d. $\Leftrightarrow \vec{v}_1 = 0$ o $\vec{v}_k \in \langle\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{k-1}\}\rangle$ para algún $k \in \{2, ..., n\}$.

Proof. $\Leftarrow$

Tenemos los siguientes casos

1. $\vec{v}_1 = 0$

   $\Rightarrow S$ es l.d.

2. $\vec{v}_1 \neq 0$

   $\Rightarrow$ para algún $k \in \{2, ..., n\} \Rightarrow \vec{v}_k \in \langle\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{k-1}\}$

$$\Rightarrow \vec{v}_k = \lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_{k-1}\vec{v}_{k-1}$$
$$\Rightarrow \vec{0}_V = \lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_{k-1}\vec{v}_{k-1} + (-1)\vec{v}_k$$

   Pero esta es una combinación lineal con escalares no todos cero que generan al cero del espacio vectorial, por lo que S es l.d.

   $\Rightarrow$

   Ahora, supongamos que S es l.d. Tenemos los siguientes casos

   a) $\vec{v}_1 = 0$

   $\Rightarrow$ ya estufas.

   b) $\vec{v}_1 \neq 0$

   Como S es l.d. $\Rightarrow\ \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ no todos cero tal que

$$\vec{0}_V = \lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_k\vec{v}_k + \lambda_{k+1}\vec{v}_{k+1} + ... + \lambda_n\vec{v}_n$$

   Sea k el máximo índice para el cual $\lambda_n \neq 0$. Al despejar $\vec{v}_k$ se escribe como combinación lineal de $\langle\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{k-1}\}\rangle$

$$\vec{v}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\vec{v}_1 - ... - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\vec{v}_{k-1}$$

$\therefore$ el Teorema 1.17 es verdadero $\square$

Teorema 1.18. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial generado por un conjunto finito $S = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\} \subseteq V \Rightarrow \exists$ algún subconjunto $\beta \subseteq S$ que es base de V

Proof. Se tienen los siguientes casos

1. Si $S = \varnothing$ o $S = \{\vec{0}_V\}$

$$\Rightarrow V = \langle S \rangle = \{\vec{0}_V\} \Rightarrow \beta = \varnothing \subseteq S \text{ es base de } V$$

2. Si $\exists\, \vec{v}_1 \neq \vec{0}_V$ y $\vec{v}_1 \in S$

   Bajo estas condiciones $\{\vec{v}_1\}$ es un conjunto l.i. Agreguemos vectores a $\{\vec{v}_1\}$ hasta que $\beta = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\}$ siga siendo l.i. y que al agregar cualquier otro vector de S a β el conjunto se vuelva l.d. Es decir, paramos de agregar justo antes de que se vuelva l.d.

   Afirmamos que β es base de V. Por construcción β es l.i. Por Teorema 1.11, basta probar que $S \subseteq \langle \beta \rangle$

   Sea $\vec{v} \in S$

   a) Si $\vec{v} \in \beta \Rightarrow \vec{v} \in \langle \beta \rangle$

   b) Si $\vec{v} \in S \setminus \beta \Rightarrow \beta \cup \{\vec{v}\}$ es l.d. Por el Teorema 1.11 $\Rightarrow \vec{v} \in \langle \beta \rangle$

$$\Rightarrow S \subseteq \langle \beta \rangle \Rightarrow \langle S \rangle \subseteq V \subseteq \langle \langle \beta \rangle \rangle = \langle \beta \rangle$$

$\therefore$ es cierto el Teorema 1.18 □

Ejemplo 1.3. V/W es un espacio vectorial, llamado V módulo W. Definido con las siguientes operaciones.

$$\oplus : (\vec{v} + W) + (\vec{u} + W) = (\vec{v} + \vec{u}) + W \qquad \text{y} \qquad \odot : \lambda(\vec{v} + W) = (\lambda \cdot \vec{v}) + W$$

Veamos que estas operaciones están bien definidas y que se trata, en efecto, de un espacio vectorial.

Proof. No es difícil ver que la suma está bien definida. Sola falta especificar que $\vec{v}_1 - \vec{v}_1' \in W$, se sigue que $\lambda(\vec{v}_1 - \vec{v}_1') \in W$, o bien, que $\lambda\vec{v}_1 - \lambda\vec{v}_1' \in W$. Por lo tanto $\lambda(\vec{v}_1 + W) = \lambda(\vec{v}_1' + W)$.

Notemos que de V son sumamente triviales las leyes asociativas, conmutativas y distributivas. Debemos únicamente demostrar la existencia del neutra aditivo y el inverso aditivo.

Sea $\vec{v} + W \in V/W$. Veamos que $W = 0 + W$ es el neutro aditivo

$$(\vec{v} + W) + W = (\vec{v} + 0) + W = \vec{v} + W \Rightarrow W + (\vec{v} + W) = (0 + \vec{v}) + W = \vec{v} + W$$

Sea $\vec{v} + W \in V/W$. Veamos que $-\vec{v} + W$ es el inverso aditivo.

$$(\vec{v} + W) + (-\vec{v} + W) = (\vec{v} - \vec{v}) + W = 0 + W = W$$

Lo que nos da el 0 del espacio, que es W, como ya vimos en la primera parte.

$\therefore V/W$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$.

Para evidenciar que son triviales las demás propiedades, note lo fácil que es demostrar la asociatividad de la suma

$$(\vec{u}+\vec{v})+W+\vec{w}+W=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}+W=\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})+W$$

Demostremos también la distribución de multiplicación escalar

$$(\lambda+\gamma)\cdot\vec{v}+W=(\lambda+\gamma)\cdot\vec{v}+W=(\lambda\cdot\vec{v}+\gamma\cdot\vec{v})+W$$
$$=(\lambda\cdot\vec{v}+W)+(\gamma\cdot\vec{v}+W)=\lambda\cdot(\vec{v}+W)+\gamma\cdot(\vec{v}+W)$$

Es por ello que decimos que las propiedades son triviales. □

Observación. El espacio V/W es el espacio de todas las clases laterales. Se le conoce como espacio cociente.

Teorema 1.19. Sea $(V,\oplus,\odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y dos vectores $\vec{u}\neq\vec{v}\in V$ y $\lambda\neq 0\in\mathbb{K}$. Si $\{\vec{v},\vec{u}\}$ es base de $V\Rightarrow\{\vec{u}+\vec{v},\lambda\vec{u}\}$

Proof. Separemos la prueba en dos partes

1. P.D. $\{\vec{u}+\vec{v},\lambda\vec{u}\}$ es l.i.

   Sean $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}\ni$

$$\vec{0}_V=\alpha_1(\vec{u}+\vec{v})+\alpha_2(\lambda\vec{u})$$
$$\vec{0}_V=\alpha_1\vec{u}+\alpha_1\vec{v}+\alpha_2\lambda\vec{u}$$
$$(\alpha_1+\alpha_2\lambda)\vec{u}+\alpha_1\vec{v}$$

$$\alpha_1+\alpha_2\lambda\Rightarrow\alpha_2=0 \qquad \alpha_1=0$$

   $\Rightarrow\{\vec{u}+\vec{v},\lambda\vec{u}\}$ es l.i.

2. P.D. $\langle\{\vec{u}+\vec{v},\lambda\vec{u}\}\rangle=V$

   Siempre se cumple que $\langle\{\vec{u}+\vec{v},\lambda\vec{u}\}\rangle\subseteq V$. Veamos que $\langle\{\vec{u}+\vec{v},\lambda\vec{u}\}\rangle\supseteq V$

   Sea $\vec{z}\in V$. Por un lado, sabemos que existen escalares únicos $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{K}$ tales que $\vec{z}=\mu_1\vec{u}\mu_2\vec{v}$

   Ahora, queremos encontrar escalares $\gamma_1,\gamma_2\in\mathbb{K}$ tales que $\vec{z}=\gamma_1(\vec{u}+\vec{v})+\gamma_2(\lambda\vec{u})$

$$\vec{z}=\gamma_1(\vec{u}+\vec{v})+\gamma_2(\lambda\vec{u})=(\gamma_1+\gamma_2\lambda)\vec{u}+\gamma_1\vec{v}$$

$$\Rightarrow(\gamma_1+\gamma_2\lambda)=\mu_1 \qquad \text{y} \qquad \gamma_1=\mu_2$$

$$\Rightarrow\mu_2+\gamma_2\lambda=\mu_1\Rightarrow\gamma_2\lambda=\mu_1-\mu_2\Rightarrow\gamma_2=\frac{\mu_1-\mu_2}{\lambda}$$
$$\Rightarrow\vec{z}=\mu_1(\vec{u}+\vec{v})+\frac{\mu_1-\mu_2}{\lambda}(\lambda\vec{u})$$

   $\therefore\vec{z}\in\{\vec{u}+\vec{v},\lambda\vec{u}\}\therefore\{\vec{u}+\vec{v},\lambda\vec{u}\}=V$ y es base

□

Teorema 1.20 (Teorema de Reemplazmiento). Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial generado por un conjunto G con exactamente n vectores y L un conjunto l.i. con exactamente m vectores. $\Rightarrow m \leqslant n$. Más aún $\exists\, H \subseteq G$ con exactamente $n-m$ vectores tal que

$$\langle L \cup H \rangle = V$$

Proof. Por inducción sobre m

1. $m = 0, L \neq \varnothing$ y $m \leqslant n$

   Más aún, $H = G$

   $$\Rightarrow H \cup L = G \cup \varnothing = G$$
   $$\Rightarrow \langle H \cup L \rangle = \langle G \rangle = V$$

   Esto porque $H \subseteq G$ y si $|H| = |G| \Rightarrow H = G$

2. Supóngamos el resultado cierto para m

3. Veamos que el resultado es cierto para $m+1$

   Sea $L = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}\}$ un conjunto l.i. Por 3. del Teorema 1.10 $L' = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\} \subseteq L$ es l.i. Además L' tiene m vectores. Por hipótesis de inducción $m \leqslant n$ y existe $H' \subseteq G$. Esto es cierto por 2. de esta misma demostración.

   $$H' = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_{n-m}\}$$

   tal que $\langle L' \cup H' \rangle = V = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\} \cup \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_{n-m}\}$

   Como $L' \cup H'$ genera a V, en particular, genera a $\vec{v}_{m+1} \Rightarrow \exists \lambda_1, ..., \lambda_m$ y $\mu_1, ..., \mu_{n-m} \in \mathbb{K}$ tales que

   $$\vec{v}_{m+1} = \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_m \vec{v}_m + \mu_1 \vec{u}_1 + ... + \mu_{n-m \vec{u}_{n-m}}$$

   Notemos que $n - m \geqslant 1$, ya que, de lo contrario, ocurre que si $n - m = 0$

   $$\vec{v}_{m+1} = \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_m \vec{v}_m$$

   se volvería l.d. Pero esto es imposible. Por lo tanto $n \geqslant m+1$

   S.P.G. supongamos que $\mu_1 \neq 0$

   $$\vec{u}_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}\vec{v}_1 - \frac{\lambda_2}{\mu_1}\vec{v}_2 - ... - \frac{\lambda_m}{\mu_1}\vec{v}_m + \frac{1}{\mu_1}\vec{v}_{m+1} - \frac{\mu_2}{\mu_1}\vec{u}_2 - ... - \frac{\mu_{n-m}}{\mu_1}\vec{u}_{n-m}$$

   Sea $H = \{\vec{u}_2, ..., \vec{u}_{n-m}\} \Rightarrow \vec{u}_1 \in \langle L \cup H \rangle$

   Todo vector de L' está en $\langle L \cup H \rangle$. Todo vector de H' está en $\langle L \cup H \rangle$

   $$\Rightarrow L' \cup H' \subseteq \langle L \cup H \rangle \Rightarrow \langle L' \cup H' \rangle \subseteq \langle L \cup H \rangle \subseteq V$$

$\therefore \langle L \cup H \rangle$ genera a V $\square$

Corolario. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial finitamente generado. Entonces, todas las bases de V tienen el mismo número de elementos.

Proof. Sean β y γ bases de V, y supongamos que $|\beta| = p$ y $|\gamma| = q$

$\Rightarrow$ Como β genera a V y γ es l.i. $\Rightarrow p \geqslant q$

$\Rightarrow$ Como γ genera a V y β es l.i. $\Rightarrow p \leqslant q$ □

Definición 1.12 (Finitamente Generado)**.** Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se dice que V es finitamente generado si existe $G \subseteq V$ finito tal que $\langle G \rangle = V$

Definición 1.13 (Dimensión)**.** Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\beta = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ una base de V. La dimensión de V sobre $\mathbb{K}$ es $|\beta| = n = \dim_{\mathbb{K}}(V)$

Corolario. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Si G es generador de $V \Rightarrow G$ tiene al menos n elementos. Más aún, si G genera a V y $|G| = n \Rightarrow G$ es base.

Proof. Sea β una base de $V \Rightarrow \beta = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ y es evidente que $|\beta| = n$. Sea G un conjunto generador. Por Teorema 1.18 $\exists\, \gamma \subseteq G$ que es base

$$\Rightarrow |\gamma| = n \leqslant |G|$$

Además, si $|G| = n$, sabemos que genera. Por el mismo Teorema 1.18 $\exists\, \gamma \subseteq G$ que es base.

$$\Rightarrow |\gamma| = n \leqslant |G| = n \Rightarrow G = \gamma$$

$\therefore G$ es base □

Corolario. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Si L es un conjunto l.i. y tiene $|L| = n \Rightarrow L$ es base.

Proof. Sea β una base de $V \Rightarrow \beta = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ y es evidente que $|\beta| = n$. Supongamos que L es un conjunto l.i. con $|L| = n$.

Por Teorema 1.20, coomo β genera a V $\exists\, H \subseteq \beta$ con exactamante $n - n = 0$ elementos tal que $\langle L \cup H \rangle = V$

$$H = \varnothing \Rightarrow \langle L \cup \varnothing \rangle = \langle L \rangle = V$$

□

Corolario. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Todo conjunto l.i. se puede extender a una base de V.

Proof. Sea β una base de $V \Rightarrow \beta = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ y es evidente que $|\beta| = n$. Sea L un conjunto l.i. con $|L| = m$. Por Teorema 1.20 $\exists\, H \subseteq \beta$ con exactamente $n - m$ vectores tal que $\langle L \cup H \rangle = V$

Como $|L \cup H| = m + (n - m) = n$, por el primer cololario del Teorema 1.20, $L \cup H$ es base. □

Observación. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Si un conjunto $G \subseteq V$ es tal que $|G| > n \Rightarrow G$ es l.d. y nada garantiza que genere.

Teorema 1.21. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{K}}(V) < \infty$, de dimensión finita y $W \leq V \Rightarrow V/W$ es de dimensión finita tal que

$$\dim V/W = \dim V - \dim W$$

Proof. Sea $\gamma = \{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n\}$ una base para W, así $\dim_{\mathbb{K}}(W) = n$. Ahora, extendamos a γ a una base para V llamada $\delta = \{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\}$, así $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n + k$

Veamos que $\Omega = \{\vec{v}_1 + W, ..., \vec{v}_k + W\}$ es base de V/W

En primer lugar, veamos que es l.i. Sean $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{gathered} W = \lambda_1(\vec{v}_1 + W) + ... + \lambda_k(\vec{v}_k + W) \\ \Rightarrow W = (\lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_k\vec{v}_k) + W \\ \Rightarrow \vec{v}' = \lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_k\vec{v}_k \in W \end{gathered}$$

Ahora, $\exists\, \alpha_1, .., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{v}' = \alpha_1\vec{w}_1 + ... + \alpha_n\vec{w}_n$

$$\begin{gathered} \Rightarrow \lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_k\vec{v}_k = \alpha_1\vec{w}_1 + ... + \alpha_n\vec{w}_n \\ \Rightarrow \lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_k\vec{v}_k - \alpha_1\vec{w}_1 - ... - \alpha_n\vec{w}_n = \vec{0}_V \end{gathered}$$

Donde la ecuación pasada es una combinación lineal de los elementos de δ igualadsos al vector 0. $\Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_k = \alpha_1 = ... = \alpha_n$

$\therefore \Omega$ es l.i.

Ahora, veamos que $\langle\Omega\rangle = V/W$. Sea $\vec{v}+W \in V/W \Rightarrow$ como $\vec{v} \in V \exists \mu_1, ..., \mu_n$ y $\pi_1, ..., \pi_k \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{gathered} \vec{v} = \mu_1\vec{w}_1 + ... + \mu_n\vec{w}_n + \pi_1\vec{v}_1 + ... + \pi_n\vec{v}_k \\ \Rightarrow \vec{v} + W = (\mu_1\vec{w}_1 + ... + \mu_n\vec{w}_n + \pi_1\vec{v}_1 + ... + \pi_n\vec{v}_k) + W \\ \Rightarrow \vec{v} + W = (\mu_1\vec{w}_1 + ... + \mu_n\vec{w}_n) + (\pi_1\vec{v}_1 + ... + \pi_n\vec{v}_k) + W \end{gathered}$$

Como $\vec{w}' = (\mu_1\vec{w}_1 + ... + \mu_n\vec{w}_n) \in W$

$$\begin{gathered} \Rightarrow \vec{v} + W = \vec{w}' + (\pi_1\vec{v}_1 + ... + \pi_n\vec{v}_k) + W = (\pi_1\vec{v}_1 + ... + \pi_n\vec{v}_k) + W \\ \vec{v} + W = \pi_1(\vec{v}_1 + W) + ... + \pi_k(\vec{v}_k + W) \end{gathered}$$

$\therefore \Omega$ genera a V/W

$\therefore \dim V/W = k = (n + k) - n = \dim V - \dim W$ □

Teorema 1.22. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{K}}(V) < \infty = n$, y $W \leq V$ subespacio de $V \Rightarrow W$ es de dimensión finita y $\dim_{\mathbb{K}}(W) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(V)$

Proof. Tenemos los siguientes casos

1. Si $W = \{\vec{0}_V\}$

   $\varnothing$ es base de $W \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(W) = 0 \leqslant n$

2. Si $\exists\, \vec{w}_1 \neq \vec{0}_V \in W$

   Note que el siguiente conjunto S es l.i.

   $$S = \{\vec{w}_1\}$$

   Agregamos vectores de W a S tal que $\gamma = \{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n\}$ sea l.i., aunque esto implique no agregar alguno, y que al agregar cualquier otro vector de W a γ, este se volviere l.d.

   Por construcción, γ es l.i. Veamos que γ es base $\Rightarrow \langle\gamma\rangle = W$. Sea $\vec{w} \in W$

   a) Si $\vec{w} \in \gamma \Rightarrow \vec{w} \in \langle\gamma\rangle$

   b) Si $\vec{w} \notin \gamma \Rightarrow \gamma \cup \{\vec{w}\}$ es l.d. $\Rightarrow \vec{w} \in \langle\gamma\rangle$, por el Teorema 1.11

$\therefore \gamma$ genera a W. Por el Teorema 1.20 $\Rightarrow k \leqslant n$ □

Teorema 1.23. Si $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W) \Rightarrow W = V$

Proof. Siguiendo la prueba anterior, sea el conjunto $\gamma = \{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n\}$. Como γ es l.i. y tiene $|\gamma| = n$ elementos $\Rightarrow \langle\gamma\rangle = V$, esto por el tercer corolario del Teorema 1.18. □

Corolario. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $W \leq V \Rightarrow$ cualquier base de W se puede extender a una base de V

Teorema 1.24. Sean W_1 yW_2 subespacios de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ de dimensión finita n.

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) = \dim_{\mathbb{K}}(W_1) + \dim_{\mathbb{K}}(W_2) - \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2)$$

Proof. Como $W_1 \cap W_2 \leq W_1 \Rightarrow W_1 \cap W_2$ tiene una base finita $\beta = \{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n\}$. Usando el corolario del Teorema 1.23, encontramos $\gamma = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k\}$ y $\xi = \{\vec{z}_1, ..., \vec{z}_r\}$ tales que $\langle\beta \cup \gamma\rangle = W_1$ y $\langle\beta \cup \xi\rangle = W_2$.

Es suficiente probar que $\beta \cup \gamma \cup \xi = \{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_k, \vec{z}_1, ..., \vec{z}_r\}$ es base de $W_1 + W_2$. De ahí se seguirá que

$$\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) = (n + k + r) = (n + k) + (n + r) - n$$

$$= \dim_{\mathbb{K}}(W_1) + \dim_{\mathbb{K}}(W_2) - \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2)$$

Primero, veamos que $\beta \cup \gamma \cup \xi$ es l.i. Sean $\mu_1, ...\mu_n$, $\alpha_1, ..., \alpha_k$, y $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$

$$\vec{0}_V = \mu_1\vec{w}_1 + ... + \mu_n\vec{w}_n + \alpha_1\vec{u}_1 + ... + \alpha_k\vec{u}_k + \lambda_1\vec{z}_1 + ... + \lambda_r\vec{z}_r$$

Sea

$$\vec{v}_1 = \mu_1\vec{w}_1 + ... + \mu_n\vec{w}_n$$
$$\vec{v}_2 = \alpha_1\vec{u}_1 + ... + \alpha_k\vec{u}_k$$
$$\vec{v}_3 = \lambda_1\vec{z}_1 + ... + \lambda_r\vec{z}_r$$

Notemos que $\vec{v}_1 \in W_1 \cap W_2$, mientras que $\vec{v}_2 \in W_1$ y $\vec{v}_3 \in W_2$

$$\Rightarrow \vec{0}_V = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \Rightarrow -\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Notemos que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in W_1$, mientras que $-\vec{v}_3 \in W_2 \Rightarrow -\vec{v}_3 \in W_1 \cap W_2$. Como β es base de $W_1 \cap W_2$, $\exists\, \nu_1, ..., \nu_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$-\vec{v}_3 = \nu_1\vec{w}_1 + ... + \nu_n\vec{w}_n$$
$$\Rightarrow -\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{0}_V = (\mu_1\vec{w}_1 + ... + \mu_n\vec{w}_n) + (\alpha_1\vec{u}_1 + ... + \alpha_k\vec{u}_k) + (-\nu_1\vec{w}_1 - ... - \nu_n\vec{w}_n)$$
$$= (\mu_1 - \nu_1)\vec{w}_1 + ... + (\mu_n - \nu_n)\vec{w}_n(\alpha_1\vec{u}_1 + ... + \alpha_k\vec{u}_k)$$

Por lo que tenemos una combinación lineal de elementos de $\beta \cup \gamma$, pero al ser base de W_1, es l.i., por lo que $\mu_1 - \nu_1 = ... = \mu_n - \nu_n = \alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$. Esto implica que $\vec{v}_2 = 0$

$$\Rightarrow \vec{0}_V = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3 = (\mu_1\vec{w}_1 + ... + \mu_n\vec{w}_n) + (\lambda\vec{z}_1 + ... + \lambda_r\vec{z}_r)$$

Pero esta es una combinación lineal de elementos de $\beta \cup \xi$, pero al ser base de W_2, es l.i., por lo que $\mu_1 = ... = \mu_n = \lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$. Esto prueba que $\beta \cup \gamma \cup \xi$ es l.i.

Veamos que $\langle \beta \cup \gamma \cup \xi \rangle = W_1 + W_2$. Como $\langle \beta \cup \gamma \rangle = W_1$ y $\langle \beta \cup \xi \rangle = W_2$ s.t.q.

$$\langle \beta \cup \gamma \cup \xi \rangle = \langle (\beta \cup \gamma) \cup (\beta \cup \xi) \rangle$$
$$\langle \beta \cup \gamma \rangle + \langle \beta \cup \xi \rangle = W_1 + W_2$$

$\therefore \dim_{\mathbb{K}}(W_1) + \dim_{\mathbb{K}}(W_2) - \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2)$

□

Definición 1.14 (Máximo Linealmente Independiente). Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $L \subseteq V$ un conjunto de vectores de V. Se dice que L es máximo l.i. si L es l.i. y al agregar cualquier otro vector $\vec{u} \in V \setminus L$ el conjunto $L \cup \{\vec{u}\}$ es l.d.

Teorema 1.25. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $L \subseteq V$ un conjunto de vectores de V. Se dice que L es base de $V \Leftrightarrow L$ es máximo l.i.

Proof. $\Rightarrow$ Supongamos que L es una base. Entonces L es l.i. Sea $\vec{w} \in V \setminus L$. Como L es bae, genera al espacio $V \Rightarrow \vec{w} \in \langle L \rangle$. Por Teorema 1.11. $L \cup \{\vec{w}\}$ es l.d. Así, L es máximo l.i.

$\Leftarrow$ Supongamos ahora L es máximo l.i.

$\Rightarrow$ por definición de máximo l.i. L es l.i. Para ver que L es base de V veamos que $\langle L \rangle = V$

Sea $\vec{u} \in V$

1. Si $\vec{u} \in L \Rightarrow \vec{u} \in \langle L \rangle$
2. Si $\vec{u} \notin L \Rightarrow \vec{u} \in V \setminus L$

Como L es máximo l.i. $\Rightarrow L \cup \{\vec{u}\}$ es l.d. Por Teorema 1.11 esto ocurre $\Leftrightarrow \vec{u} \in \langle L \rangle$ COmo $\vec{u}$ es un elemento cualquiera de $V \Rightarrow L$ genera a V. □

Definición 1.15 (Maximal)**.** Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Un elemento de M de $\mathcal{F}$ es maximal (respecto a la inclusión $\subset$) si M no está contenido en ningún otro elemento de $\mathcal{F}$.

Observación. Máximo no es maximal. Coloquialmente, un elemento es máximo si *todo esta por debajo* de él. Solo hay uno, mientras que pueden haber varios maximales. Un maximal, *no tiene nada por arriba.*

Notación. Utilizamos al símbolo $A \subset B$ para indicar que A es subconjunto propio de B. Es decir, no puede haber igualdad.

Definición 1.16. Una coloección de conjuntos $\mathscr{C}$ es una cadena si A y B son comparables, es decir, $A \subset B$ o $B \subset A$, esto $\forall\, A, B \in \mathscr{C}$

Lema 1.2 (Principio de Maximalidad)**.** Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. So para cada cadena $\mathscr{C} \subseteq \mathcal{F}$ hay un elemento de $\mathcal{F}$ que contiene a cada elemento de $\mathscr{C} \Rightarrow$ hay elementos maximales de $\mathcal{F}$.

Teorema 1.26. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y S un conjunto l.i. $\Rightarrow \exists$ un conjunto máximo l.i. que contiene a S

Proof. Sea

$$\mathcal{F} = \{L \subseteq V \mid L \text{ es l.i. y} S \subseteq L\}$$

Note que $\mathcal{F} \neq \varnothing$ ya que $S \in \mathcal{F}$ ya que $S \subseteq S$

Ahora, sea $\mathscr{C} \subseteq \mathcal{F}$ una cadena de $\mathcal{F}$. Hay que ver que $\exists \mathcal{U}$ en $\mathcal{F}$ que contiene a a $C \,\forall\, C \in \mathscr{C}$

Sea

$$\mathcal{U} = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} C$$

Claramente $C \subseteq \mathscr{C}$ y $S \subseteq \mathcal{U}$. Falta ver que $\mathcal{U}$ es l.i.

Sean $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k \in \mathcal{U}$ y $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{0}_V = \lambda_1 \vec{u}_1 + ... + \lambda_k \vec{u}_k$$

Como $\mathscr{C}$ es una cadena $\exists\, C - 0 \in \mathscr{C}$ tales que $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k \in C_0$

Como C_0 es l.i. $\Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$

Como $S \subseteq C_0 \Rightarrow \mathcal{U}$ es l.i. y $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$ □

Corolario. Todo espacio vectorial tiene base.

Proof. Tenemos los siguientes casos

1. Si V es finitamente generado, por el Teorema 1.20 y sus corolarios, todo conjunto l.i. en V se puede extender a una base.

2. Si V no es finitamente generado. Sea $s = \{\vec{u}_1\}$ con $\vec{u}_1 \neq 0$. Por el Teorema 1.26 $\exists$ un conjunto máximo l.i. que contiene a S. Por Teorema 1.25 un conjunto l.i. es base.

$\square$

Capítulo 2

Transformaciones Lineales

2.1. Definición y Ejemplos

Definición 2.1 (Transformación lineal). Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Una transformación lineal (funcional lineal) es una función $T : V \to W$ que satisface

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \qquad \text{y} \qquad T(\lambda \cdot \vec{u}) = \lambda \cdot T(\vec{u})$$

Teorema 2.1. Si $T : V \to W$ es lineal $\Rightarrow T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

Proof. Para algún $\vec{u} \in V$

$$\vec{0}_V = 0 \cdot \vec{u} \Rightarrow T(\vec{0}_V) = T(0 \cdot \vec{u}) = 0 \cdot T(\vec{u}) = \vec{0}_W$$

□

Teorema 2.2. Si $T : V \to W$ es lineal $\Rightarrow T$ es lineal $\Leftrightarrow T(\lambda \cdot \vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

Proof. $\Rightarrow$ Supongamos que T es lineal

$$T(\lambda \cdot \vec{u} + \vec{v}) = T(\lambda \cdot \vec{u}) + T(\vec{v}) = \lambda \cdot T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

$\Leftarrow$ Supongamos que T satisface $T(\lambda \cdot \vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

Notemos que, tomando $\lambda = 1$

$$T(1 \cdot \vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u} + \vec{v}) = 1 \cdot T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

Esto satisface el primer inciso de la Definición 2.1. Ahora, note que

$$T(\lambda \cdot \vec{u}) = T(\lambda \cdot \vec{u} + \vec{0}_V) = \lambda \cdot T(\vec{u}) + T(\vec{0}_V)$$

Note que, no podemos usar el Teorema 2.1, porque no sabemos si T es lineal

$$T(\vec{0}_V) = T(-\vec{u} + \vec{u}) = T(-1 \cdot \vec{u} + \vec{u}) = -1 \cdot T(\vec{u} + T(\vec{u}) = \vec{0}_W$$

Es por ello que

$$\lambda \cdot T(\vec{u}) + T(\vec{0}_V) = \lambda \cdot T(\vec{u}) + \vec{0}_W = \lambda \cdot T(\vec{u})$$

$\therefore$ es cierto el Teorema 2.2 $\square$

Teorema 2.3. Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$, se dice entonces que $T : V \to W$ es una transformación lineal, $\Leftrightarrow$

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T\left(\vec{v}_i\right)$$

con $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ y $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in V$

Proof. $\Rightarrow$

Supongamos que T es lineal, por lo que abre sumas y saca escalares.

Si $n = 1$, por las dos propiedades de la definición de transformación lineal:

$$T(\lambda_1 \vec{v}_i) = \lambda_1 \cdot T(\vec{v}_i)$$

Supongamos el resultado cierto para $n = k$

Ahora, veamos que es cierto para $n = k + 1$

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i\right) = T\left(\lambda_1 \vec{v}_1\right) + ... + T\left(\lambda_k \vec{v}_k\right) + T\left(\lambda_{k+1} \vec{v}_{k+1}\right)$$

Como estamos suponiendo el resultado cierto para k, se tiene que,

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i T\left(\vec{v}_i\right) + T\left(\lambda_{k+1} \vec{v}_{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T\left(\vec{v}_i\right) + \lambda_{k+1} \cdot T\left(\vec{v}_{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T\left(\vec{v}_i\right)$$

$\Leftarrow$

Suponga que $T\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i T\left(\vec{v}_i\right)$. Veamos que T es transformación lineal. Es evidente ver que abre sumas y saca escalares. Pero esta es la definición de transformación lineal.

$\therefore$ es verdadero el Teorema 2.3 $\square$

Definición 2.2 (Núcleo)**.** Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y $T : V \to W$ una transformación lineal. El núcleo o kernel de T está dado por

$$\ker(T) = \{\vec{u} \in V \mid T(\vec{u}) = \vec{0}_W\} \subseteq V$$

Definición 2.3 (Imágen). Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y $T : V \to W$ una transformación lineal. La imagen de T está dada por

$$\mathrm{Im}(T) = \{\vec{w} \in W \mid \exists\, \vec{u} \in V \Rightarrow T(\vec{u}) = \vec{w}\} \subseteq W$$

Teorema 2.4. Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y $T : V \to W$ una transformación lineal $\Rightarrow$ se cumple lo siguiente

1. $\ker(T)$ es un subespacio de V
2. $\mathrm{Im}(T)$ es un subespaco de W

Proof.

1. a) Como T es lineal

$$T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Rightarrow \vec{0}_V \in \ker(T)$$

   b) Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \ker(T)$. Veamos que $\vec{u} + \vec{v} \in \ker(T)$

   Como $\vec{u}, \vec{v} \in \ker(T)$

$$T(\vec{u}) = \vec{0}_W = T(\vec{v}) \Rightarrow T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = \vec{0}_W + \vec{0}_W = \vec{0}_W$$

   $\therefore \vec{u} + \vec{v} \in \ker(T)$

   c) Sean $\vec{u} \in \ker(T)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Veamos que $\lambda \cdot \vec{u} \in \ker(T)$

$$T(\lambda \cdot \vec{u}) = \lambda \cdot T(\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{0}_W = \vec{0}_W$$

   $\therefore \lambda \cdot \vec{u} \in \ker(T)$

2. a) Como T es lineal

$$T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Rightarrow \vec{0}_V \in \mathrm{Im}(T)$$

   b) Sean $\vec{z}, \vec{w} \in \mathrm{Im}(T)$. Veamos que $\vec{z} + \vec{w} \in \mathrm{Im}(T)$

   Como $\vec{z}, \vec{w} \in \mathrm{Im}(T)\ \exists\, \vec{u}, \vec{v} \in V$ tal que

$$T(\vec{u}) = \vec{z} \qquad \text{y} \qquad T(\vec{v}) = \vec{w}$$

   Note que

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = \vec{z} + \vec{w}$$

   $\therefore \vec{z} + \vec{w} \in \mathrm{Im}(T)$

   c) Sean $\vec{z} \in \mathrm{Im}(T)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Veamos que $\lambda \cdot \vec{z} \in \mathrm{Im}(T)$

   Como $\vec{z} \in \mathrm{Im}(T)\ \exists\, \vec{u} \in V$ tal que $T(\vec{u}) = \vec{z}$

Note que

$$T(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot T(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{z}$$

$\therefore \lambda \cdot \vec{z} \in \operatorname{Im}(T)$ □

Teorema 2.5. Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $T : V \to W$ una transformación lineal, y $\beta \subseteq V$ una base de $V \Rightarrow T(\beta) = \{T(\vec{v}) \mid \vec{v} \in \beta\}$ genera a $\operatorname{Im}(T)$

Proof. Sea $\vec{w} \in \operatorname{Im}(T) \Rightarrow \exists\, \vec{v} \in V$ tal que $T(\vec{v}) = \vec{w}$

Como $\vec{v} \in V$ y β es base de $V \Rightarrow \exists\, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_k \in \beta$ y $\lambda, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ tal que

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow \vec{w} = T(\vec{v}) = T\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot T(\vec{v}_i)$$

Pero entonces $\vec{w}$ es una combinación lineal de elementos de $T(\beta)$

$\therefore T(\beta)$ genera a $\operatorname{Im}(T)$ □

Teorema 2.6 (Teorema de la Dimensión)**.** Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $T : V \to W$ una transformación lineal $\Rightarrow$

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(\ker(T)) + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im}(T))$$

Proof. Sea $\gamma = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\}$ una base de $\ker(T)$, extendamos γ a $\beta = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, ..., \vec{v}_n\}$ una base de V, esto por el Teorema 1.23. Veamos que $T(\beta \setminus \gamma) = \{T(\vec{v}_{k+1}), ..., T(\vec{v}_n)\}$ es base de $\operatorname{Im}(T)$.

Si $\vec{w} \in \operatorname{Im}(TI \Rightarrow \exists\, \vec{v} \in V$ tal que $T(\vec{v}) = \vec{w}$ Note ahora que podemos expresar a $\vec{v}$ como

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow T(\vec{v}) = T\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot T(\vec{v}_i) + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \cdot T(\vec{v}_i)$$

$$= \vec{0}_W + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \cdot T(\vec{v}_i)$$

$\therefore T(\beta \setminus \gamma)$ genera a $\operatorname{Im}(T)$

Ahora veamos que $T(\beta \setminus \gamma)$ es l.i.

Sea $\eta_{k+1}, ..., \eta_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$\vec{0}_W = \sum_{j=k+1}^{n} \eta_j \cdot T(\vec{v}_j) \Rightarrow \vec{0}_W = T\left(\sum_{j=k+1}^{n} \eta_j \cdot \vec{v}_j\right)$$

Notemos que $\sum_{j=k+1}^{n} \eta_j \cdot \vec{v}_j \in \ker(T) \Rightarrow$ es una combinación lineal de elementos de γ

$\Rightarrow\ \exists\, \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{K}$ tal que

$$\sum_{j=k+1}^{n} \eta_j \cdot \vec{v}_j = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \cdot \vec{v}_j \Rightarrow -\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \cdot \vec{v}_j + \sum_{j=k+1}^{n} \eta_j \cdot \vec{v}_j = \vec{0}_V$$

Notemos ahora, que esta es una combinación lineal de elementos de β que es igual a $\vec{0}_v$. Como β es base $\forall\, j \in \{1, ..., n\}$ s.t.q. $\eta_j = \alpha_j = 0$

$\therefore T(\beta \setminus \gamma)$ es l.i. y por ello es base de $\mathrm{Im}(T)$

Se sigue entonces que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, $\dim_{\mathbb{K}}(\ker(T)) = k$, y $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(T)) = n - k$

$\therefore n = k + (n - k) \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(\ker(T)) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(T))$ $\square$

Teorema 2.7. Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $T : V \to W$ una transformación lineal $\Rightarrow T$ es inyectiva $\Leftrightarrow \ker(T) = \{\vec{0}_V\}$

Proof. $\Leftarrow$ Supongamos que $\ker(T) = \{\vec{0}_V\}$. Sean $\vec{u}, \vec{v} \in V$ tales que $T(\vec{u}) = T(\vec{v})$

$$\Rightarrow T(\vec{u}) - T(\vec{v}) = \vec{0}_W \Rightarrow T(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}_W$$

$\Rightarrow \vec{u} - \vec{v} \in \ker(T)$. Como supusimos que $\ker(T) = \{\vec{0}_V\} \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}_V \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$

$\therefore T$ es inyectiva ya que $T(\vec{u}) = T(\vec{v}) \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$

$\Rightarrow$ Suongamos que T es inyectiva. Sea $\vec{u} \in \ker(T)$

$\Rightarrow T(\vec{u}) = \vec{0}_W$ y $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Rightarrow T(\vec{u}) = T(\vec{0}_V)$. Como T es inyectiva s.t.q. $\vec{0}_V = \vec{u}$

$\therefore \ker(T) = \{\vec{0}_V\}$ $\square$

Teorema 2.8. Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de la misma $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$, $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces, se cumple lo siguiente

1. T es inyectiva
2. T es suprayectiva
3. $\dim_{\mathbb{K}}(W) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(T))$

Proof. T es inyectiva $\Leftrightarrow \ker(T) = \{\vec{0}_V\} \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(\ker(T)) = 0 \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(T))$ $\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(W) = \dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(T)) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(T) = W \Leftrightarrow T$ es suprayectiva.

El penúltimo $\Leftrightarrow$ sucede por Teorema 1.23 $\square$

Corolario. Si dos funciones lineales T y R coinciden en los elementos de una base $\Rightarrow T = R$

Teorema 2.9. Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n < \infty$, $\beta = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ una base de V, y $\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n \in W$ cualesquiera n vectores en $W \Rightarrow \ \exists$ una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que

$$T(\vec{v}_i) = \vec{w}_i \; \forall \, i \in \{1, ..., n\}$$

Proof. Sea $\vec{v} \in V$ y note que $\beta = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ es base de $V \Rightarrow \ \exists \, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n$$

Definimos a $T : V \to W \Rightarrow T(\vec{v}) = \lambda_1 \vec{w}_1 + ... + \lambda_n \vec{w}_n$

Veamos que T es lineal

Sean $\vec{u}, \vec{z} \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \exists \, \mu_1, ..., \mu_n$ y $\eta_1, ..., \eta_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{u} = \mu_1 \vec{v}_1 + ... + \mu_n \vec{v}_n \qquad \text{y} \qquad \vec{z} = \eta_1 \vec{v}_1 + ... + \eta_n \vec{v}_n$$

Note que

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \vec{u} + \vec{z} &= (\alpha \cdot \mu_1 + \eta_1)\vec{v}_1 + ... + (\alpha \cdot \mu_n + \eta_n)\vec{v}_n \\
\Rightarrow T(\alpha \cdot \vec{u} + \vec{z}) &= (\alpha \cdot \mu_1 + \eta_1)\vec{w}_1 + ... + (\alpha \cdot \mu_n + \eta_n)\vec{w}_n \\
&= \alpha \cdot \mu_1 \vec{w}_1 + ... + \alpha \cdot \mu_n \vec{w}_n + \eta_1 \vec{v}_1 + ... + \eta_n \vec{w}_n \\
\Rightarrow \alpha(\mu_1 \vec{v}_1 + ... + \mu_n \vec{w}_n) + T(\vec{z}) &= \alpha \cdot T(\vec{u}) + T(\vec{z}) =
\end{aligned}$$

$\therefore T$ es lineal

Note que es cierto que $T(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$, ya que por como se definió T, tomando $\lambda = 1 \Rightarrow T(1 \cdot \vec{v}_i) = 1 \cdot \vec{w}_i \; \forall \, i \in \{1, ..., n\}$

Finalmente, veamos que T es único. Supongamos, para generar una contradicción, otra transformación lineal $R : V \to W$ tal que $R(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$. Pero por el corolario del Teorema 2.8, $R = T$ □

Definición 2.4 (Base Ordenada)**.** Una base ordenada de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ es una base que tiene un órden específico.

Ejemplo 2.1. En $V = \mathbb{R}^3$, podemos tener las siguientes bases ordenadas

$$\beta = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\} \qquad \gamma = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Cada una de ellas tiene un orden específico.

$$\xi = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \qquad \varphi = \{(3, 0, 0), (0, 6, 0), (0, 0, 4)\}$$

También tienen un orden específico

Notación. A partir de este momento en el manual, todas las bases serán bases ordenadas

2.2. Matriz Asociada

Definición 2.5 (Vector Coordenado). Sean $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\beta = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ una base ordenada de V, y $\vec{v} \in V$ un elemento cualquiera.

El vector coordenado de $\vec{v}$ con respecto de la base β se define como

$$[\vec{v}]_\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

donde $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ son los esclares tales que $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i$

Definición 2.6 (Matriz Asociada). Sean $(V, \oplus, \odot)$, $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $\beta = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$, $\gamma = \{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n\}$ bases ordenadas de V y W respectivamente, y $T : V \to W$ una transformación lineal.

La maatriz asociada a T con respecto a las bases β y γ se define como

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m \times n}$$

donde $a_{1j}, ..., a_{mj} \in \mathbb{K}$ son los únicos esclares que existen $\forall\, j \in \{1, ..., n\}$ tales que $T(\vec{v}_j)) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot \vec{w}_i$

Observación. La j-ésima columna de $[T]_\beta^\gamma$ es el vector coordenado $\left[T(\vec{v}_j)\right]_\beta$

Definición 2.7 (Suma Directa). Seaa $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{K}}(V) < \infty$ y $W_1, W_1 \leq V$. Diremos que V es suma directa de W_1 y W_2 si ocurre lo siguiente

$$W_1 + W_2 = V \qquad \text{y } W_1 \cap W_2 = \vec{0}_V$$

Notación. Si V es suma directa de W_1 y W_2 se denota $V = W_1 \oplus W_2$

Observación. No hay que confundir la notación de $\oplus$ como suma directa, y como la suma definida en un espacio vectorial. Cuando se vea en operaciones se tratará de la suma directa.

Corolario. Todo espacio vectorial se puede escribir como la suma de dos subespacios.

Ejemplo 2.2. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de $\dim_{\mathbb{K}}(V) < \infty$ y $T : V \to V$ una transformación lineal. Veamos que si $T^2 = (T \circ T) = T$ es idempotente

$$\Rightarrow V = \ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$$

Donde V es la suma directa del nucleo e imagen de T

Proof. Veamos que $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \vec{0}_V$

Sea $\vec{v} \in \ker(T) \cap \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \vec{v} \in \ker(T)$

$$T(\vec{v}) = \vec{0}_V \Rightarrow \ \exists\, \vec{u} \in V \ni T(\vec{u} = \vec{v}$$
$$\Rightarrow T(T(\vec{u})) = T(\vec{v}) \Rightarrow T(\vec{u}) = T^2(\vec{u}) = \vec{0}_V = \vec{v}$$

Ahora veamos que si $\vec{u} \in \ker(T)$ y $\vec{r} \in \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \ \forall\, \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{v} = \vec{u} + \vec{r}$

Sea $\vec{v} \in V$. Como $T : V \to V \Rightarrow T(\vec{v}) \in \mathrm{Im}(T)$

Sea $\vec{w} = \vec{v} - T(\vec{v})$

$$T(\vec{w}) = T(\vec{v} - T(\vec{v})) = T(\vec{v}) - T(\vec{v}) = \vec{0}_V$$

$\therefore \vec{w} \in \ker(T)$ Pero note que $\vec{v} = T(\vec{v}) + \vec{w}$, lo que cumple lo que queríamos probar. □

Teorema 2.10. Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Si $\dim_{\mathbb{K}}(V) > \dim_{\mathbb{K}}(W)$ $\Rightarrow T$ no puede ser inyectiva.

Proof. Supongamos, para generar una contradicción, que $\dim_{\mathbb{K}}(V) > \dim_{\mathbb{K}}(W)$ y que T es suprayectiva. Note entonces que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(T)) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$. Por el Teorema 2.6 s.t.q.

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(T)) + \dim_{\mathbb{K}}(\ker(T)) = \dim_{\mathbb{K}}(W) + \dim_{\mathbb{K}}(\ker(T)) > \dim_{\mathbb{K}}(W)$$

$\therefore T$ no puede ser suprayectiva, ni inyectiva. □

Ejemplo 2.3. Sea $V = M_2(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices 2×2, y $W = P_2(\mathbb{R})$, el espacio de los polinomios con grado $\leqslant 2$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Considere a $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal definida por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b)x^2 + (c-d)x + (a+b+c-d)1$$

Y considere a las bases siguientes

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{y} \qquad \gamma = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$$

Veamos que T es lineal, propongamos $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$, y obtengamos $[T]_\beta^\gamma$

Proof. Sean $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$T(\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}) = T\left(\lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right) = T\begin{pmatrix} \lambda a_1 + a_2 & \lambda b_1 + b_2 \\ \lambda c_1 + c_2 & \lambda d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$= (\lambda a_1 + a_2 + \lambda b_1 + b_2)x^2 + (\lambda c_1 + c_2 - \lambda d_1 - d_2)x + \lambda a_1 + a_2 + \lambda b_1 + b_2 + \lambda c_1 + c_2 - \lambda d_1 - d_2$

$= \lambda \Big[(a_1+b_1)x^2+(c_1-d_1)x+a_1+b_1+c_1-d_1\Big]+(a_2+b_2)x^2+(c_2-d_2)x+a_2+b_2+c_2-d_2$

$$\lambda \cdot T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot T(\mathbf{A}) + T(\mathbf{B})$$

$\therefore T(\lambda \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda \cdot T(\mathbf{A}) + T(\mathbf{B})$

Ahora, sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Queremos $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow (a+b)x^2 + (c-d)x + (a+b+c-d) = 0$$

Por lo que se se tiene lo siguiente

$$a+b=0 \qquad c-d=0 \qquad a+b+c-d=0$$

Esto implica que $b=-a$ y que $c=d$. Podemos deducir que el núcleo es

$$\ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ c & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Una base de $\ker(T)$ es la siguiente, y notemos que tiene $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(T)) = 2$

$$\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ahora, por el Teorema 2.6 sabemos que $\dim_{\mathbb{R}}(M_2(\mathbb{R})) = 4 = \dim_{\mathbb{R}}(\ker(T)) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(T))$. Como $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(T)) = 2 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(T)) = 2$

Aplicando T a β la base de la imagen obtenemos lo siguiente

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2+1 \qquad T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2x^2+2$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2x^2+x+3 \qquad T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2x^2+2$$

$$\gamma_1 = \{x^2+1, 2x^2+x+3\}$$

Y esta es una base de la $\mathrm{Im}(T)$ con $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(T)) = 2$

$\therefore \mathrm{Im}(T) = \langle \gamma_1 \rangle$

Finalmente, obtengamos la matriz asociada $[T]_{\beta}^{\gamma}$

Sea $f(x) = px^2 + qx + \xi$

$$px^2 + qx + \xi = \lambda(1) + \mu(1+x) + \eta(1+x+x^2)$$

De esta ecuación es que sacaremos el vector coordenado $[px^2+qx+\xi]_{\gamma}$, expresaremos λ, μ, η los escalares de la combinación lineal en terminos de p, q, ξ

$$\Rightarrow px^2 + qx + \xi = \eta x^2 + (\eta + \mu)x + (\eta + \mu + \lambda)$$

Por lo que se se tiene lo siguiente

$$\eta = p \qquad q = \eta + \mu \Rightarrow \mu = q - p \qquad \lambda + \eta + \mu = \xi \Rightarrow \lambda = \xi - q$$

$$[px^2 + qx + \xi]_\gamma = \begin{bmatrix} \lambda = \xi - q \\ \mu = q - p \\ \eta = p \end{bmatrix}$$

Se usan estos escalares con los polinomios obtenidos al aplicar la transformación lineal a β

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

□

Notación. Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.

$$\mathscr{L}(V, W) = \{T : V \to W \mid T \text{ es transformación lineal } \}$$

Definición 2.8. Sean $T, R \in \mathscr{L}(V, W)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Definamos a

$$(T + R) : V \to W \text{ como } (T + r)(\vec{v}) = T(\vec{v}) + R(\vec{v})$$

$$(\lambda T) : V \to W \text{ por } (\lambda \cdot T)(\vec{v}) = \lambda \cdot T(\vec{v})$$

a la suma de transformaciones lineales y producto por escalar de transformaciones lineales.

Teorema 2.11. Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\Rightarrow$ s.t.q.

1. $\forall\, T, R \in \mathscr{L}(V, W) \Rightarrow T + R \in \mathscr{L}(V, W)$
2. $\forall\, T \in \mathscr{L}(V, W)$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \cdot T \in \mathscr{L}(V, W)$

Proof.

1. Sean $T, R \in \mathscr{L}$, $\eta \in \mathbb{K}$, y $\vec{v}, \vec{u} \in V$ elementos arbitrarios

   Veamos que $(T + R)(\eta\vec{u} + \vec{v}) = \eta(T + R)(\vec{u}) + (T + R)(\vec{v})$

   Por la Definición 2.8, sabemos que

   $(T + R)(\eta\vec{u} + \vec{v}) = T(\eta\vec{u} + \vec{v}) + R(\eta\vec{u} + \vec{v})$

   Y como $T, R \in \mathscr{L}(V, W)$ son lineales

$$\eta T(\vec{u}) + T(\vec{v}) + \eta R(\vec{u}) + R(\vec{v}) = \eta(T(\vec{u}) + R(\vec{u})) + T(\vec{v}) + R(\vec{v})$$

Una vez más, por Definición 2.8 s.t.q. que lo anterior es $\eta(T+R)(\vec{u})+(T+R)(\vec{v})$

2. Sean $T \in \mathscr{L}(V,W)$, $\lambda, \eta \in \mathbb{K}$, y $\vec{v}, \vec{u} \in V$ cualesquiera

   Veamos que $(\lambda \cdot T)(\eta\vec{u}+\vec{v}) = \eta(\lambda \cdot T)(\vec{u}) + (\lambda \cdot T)(\vec{v})$

$$(\lambda \cdot T)(\eta\vec{u}+\vec{v}) = \lambda \cdot T(\eta\vec{u}+\vec{v})$$

   Como $T \in \mathscr{L}(V,W)$ es lineal

$$\lambda \cdot T(\eta\vec{u}+\vec{v}) = \lambda \cdot \eta \cdot T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = \eta(\lambda \cdot T)(\vec{u}) + (\lambda \cdot T)(\vec{v})$$

$\therefore$ las operaciones de la Definición 2.8 son lineales. □

Teorema 2.12. Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $\beta = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$, y $\gamma = \{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n\}$ bases de V y W respectivamente $\Rightarrow$

1. $[T+R]_\beta^\gamma = [T]_\beta^\gamma + [R]_\beta^\gamma$

2. $[\lambda \cdot T]_\beta^\gamma = \lambda \cdot [T]_\beta^\gamma$

Proof. 1. Sean a_{ij} y b_{ij} las j-ésimas columnas de las matrices $[T]_\beta^\gamma$ y $[R]_\beta^\gamma$, donde $i = \{1,2,...,m\}$ y $j = \{1,2,...,n\}$. Entonces $\forall \vec{v}_j \in \beta$ se tiene que

$$T(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{w}_i \qquad \text{y} \qquad R(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\vec{w}_i$$

$$\Rightarrow (T+R)(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^{m}(a_{ij}+b_{ij})\vec{w}_i$$

$$\Rightarrow ([T+R]_\beta^\gamma)_{ij} = a_{ij}+b_{ij} = ([T]_\beta^\gamma + [R]_\beta^\gamma)_{ij}$$

2. Sea $([T]_\beta^\gamma)_{ij} = \mathbf{A}_{ij}$

$$\Rightarrow T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_{ij} w_i$$

$$\Rightarrow \lambda T(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda \mathbf{A}_{ij} w_i \text{ donde } \lambda \in \mathbb{K}$$

   Esto implica que $(\lambda[T]_\beta^\gamma)_{ij} = \lambda \mathbf{A}_{ij}$

$\therefore [\lambda T]_\beta^\gamma = \lambda [T]_\beta^\gamma$ □

Teorema 2.13. Sean $(V, \oplus, \odot)$, $(W, \oplus, \odot)$ y $(Z, \oplus, \odot)$ tres $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y sean $T : V \to W$ y $R : W \to Z$ transformaciones lineales. Entonces $RT : V \to Z$ es lineal.

Proof. Sean $\vec{v}, \vec{u} \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}(RT)(\lambda\vec{v}+\vec{u}) &= R(T(\lambda\vec{v}+\vec{u})) = R(\lambda T(\vec{v}) + T(\vec{u})) \\ &= \lambda R(T(\vec{v})) + R(T(\vec{u})) = \lambda(RT)(\vec{v}) + (RT)(\vec{u})\end{aligned}$$

$\therefore RT : V \to Z$ es lineal □

Teorema 2.14. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $T, R, S \in \mathscr{L}(V,V) = \mathscr{L}(V,V) \Rightarrow$

1. $T(R+S) = TR + TS$ y $(R+S)T = RT + ST$
2. $T(RS) = (TR)S$
3. $T\mathrm{I} = \mathrm{I}T = T$
4. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda(RS) = (\lambda R)S = R(\lambda S)$

Proof. Sea $\vec{v} \in V$.

1. Se sigue que $[T(R+S)](\vec{v}) = T[(R+S)(\vec{v})]$. Por las operaciones definidas para el espacio $\mathscr{L}(V)$, sabemos que
$$T[R(\vec{v}) + S(\vec{v})] = T(R(\vec{v})) + T(S(\vec{v})) = TR + TS$$
La demostración para $(R+S)T = RT + ST$ resulta ser sencilla.
2. Note que
$$[T(RS)](\vec{v}) = T[(RS)(\vec{v})] = T[R(S(\vec{v}))] = TR[S(\vec{v})] = [(TR)S](\vec{v})$$
$\therefore T(RS) = (TR)S$.
3. Note que
$$(T\mathrm{I})(\vec{v}) = T(\mathrm{I}(\vec{v})) = T(\vec{v}) = \mathrm{I}(T(\vec{v})) = (\mathrm{I}T)(\vec{v})$$
4. Se tiene que
$$[\lambda(RS)](\vec{v}) = \lambda[(RS)(\vec{v})] = \lambda[R(S(\vec{v}))] = (\lambda R)[S(\vec{v})]$$
Lo que implica que $\lambda(RS) = (\lambda R)S$, sin embargo, es evidente que
$$[R(\lambda S)](\vec{v}) = R[\lambda S(\vec{v})] = (\lambda R)[S(\vec{v})]$$
$\therefore \lambda(RS) = (\lambda R)S = R(\lambda S)$

$\therefore$ es verdadero el Teorema 2.1 □

Definición 2.9 (Multiplicación de matrices). Sean $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $M_{n\times p}(\mathbb{K})$ los espacios vectoriales de las matrices con dimensión $m \times n$ y $n \times p$ con entradas del campo $\mathbb{K}$. Sea $\mathbf{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $\mathbf{B} \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$.

Definimos el producto de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, denotado como $\mathbf{AB}$, donde $\mathbf{AB} \in M_{m\times p}(\mathbb{K})$, como la operación

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}$$

donde $i = \{1, 2, ..., m\}$ y $p = \{1, 2, ..., p\}$

Note que la entrada $(\mathbf{AB})_{ij}$ es la suma de los productos de la i-ésima fila de la matriz $\mathbf{A}$ y la j-ésima columna de la matriz $\mathbf{B}$.

Notación. El uso de las negritas en mayúsculas se usará para denotar matrices.

Teorema 2.15. Sean $(V, \oplus, \odot)$, $(W, \oplus, \odot)$ y $(Z, \oplus, \odot)$ tres $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, finitamente generados, con sus respectivas bases ordenadas $\alpha = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$, $\beta = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_m\}$ y $\gamma = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2, ..., \vec{z}_p\}$. Sean $T : V \to W$ y $R : W \to Z$ dos transformaciones lineales $\Rightarrow$

$$[RT]_\alpha^\gamma = [R]_\beta^\gamma [T]_\alpha^\beta$$

Proof. Sean $\mathbf{A} = [R]_\beta^\gamma$ y $\mathbf{B} = [T]_\alpha^\beta$. Considere la matriz $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = [RT]_\alpha^\gamma$. Entonces, para $j = \{1, 2, ..., n\}$ tenemos

$$(RT)(\vec{v}) = R(T(\vec{v}_j)) = R\left(\sum_{k=1}^{m} \mathbf{B}_{kj}\vec{w}_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{B}_{kj} R(\vec{w}_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \mathbf{B}_{kj}\left(\sum_{i=1}^{p} \mathbf{A}_{ik}\vec{z}_i\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{m} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}\right)\vec{z}_i = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{C}_{ij}\vec{z}_i$$

□

Corolario. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacios vectorial, finitamente generado, sea β una base ordenada de dicho espacio. Sean $T, R \in \mathscr{L}(V) \Rightarrow [RT]_\alpha^\gamma = [R]_\beta^\gamma [T]_\alpha^\beta$.

Definición 2.10 (Delta de Kronecker). Definimos a la delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

La matriz $\mathbf{I}_n \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz de con dimensión $n \times n$ cuyas entradas siguen la regla $(\mathbf{I}_n)_{ij} = \delta_{ij}$.

Teorema 2.16. Sean $\mathbf{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $\mathbf{B} \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$. $\forall\, j \in (1 \leqslant j \leqslant p)$, sean u_j y v_j las j-ésimas columnas de $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{B}$, respectivamente. Entonces

1. $u_j = \mathbf{A}v_j$.
2. $v_j = \mathbf{B}e_j$, donde e_j es el j-ésimo vector estándar de $\mathbb{K}^p$.

Proof.
1. Se tiene que

$$u_j = \begin{bmatrix} (\mathbf{AB})_{1j} \\ (\mathbf{AB})_{2j} \\ \vdots \\ (\mathbf{AB})_{mj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{1k}\mathbf{B}_{kj} \\ \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{2k}\mathbf{B}_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{mk}\mathbf{B}_{kj} \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1j} \\ \mathbf{B}_{2j} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{mj} \end{bmatrix} = \mathbf{A}v_j$$

2. Tenemos que $\mathbf{B}e_j \in \mathbb{K}^m$, y sabemos que $(\mathbf{B}e_j)_i = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{B}_{ik}(e_j)_i = \mathbf{B}_{ij}$, dado que $(e_j)_i = 1$ solo cuando $i = j$, de otro modo $(e_j)_i = 0$.

$\therefore$ es verdadero el Teorema 2.16 $\square$

Teorema 2.17. Sea $(V, \oplus, \odot)$, $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, finitamente generados, con bases ordenadas β y γ respectivamente, y sea $T : V \to W$ una transformación $\Rightarrow \forall \vec{v} \in V$ s.t.q.

$$[T(\vec{v})]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [\vec{v}]_\beta$$

Proof. Sea $\vec{v} \in V$ f.p.a, definimos $f : \mathbb{K} \to V$ con la regla de correspondencia $f(\lambda) = \lambda\vec{v}$ y $g : \mathbb{K} \to W$ con la regla de correspondencia $g(\lambda) = \lambda T(\vec{v})$, donde $\lambda \in \mathbb{K}$.

Sea $\alpha = \{1\}$ la base canónica, y ordenada, de $\mathbb{K}$. Note usted entonces que $g = Tf$. Usando el Teorema 2.15 obtenemos

$$[T(\vec{u})]_\gamma = [g(1)]_\gamma = [g]_\alpha^\gamma = [Tf]_\alpha^\gamma = [T]_\beta^\gamma [f]_\alpha^\beta = [T]_\beta^\gamma [f(1)]_\beta = [T]_\beta^\gamma [\vec{v}]_\beta$$

$\therefore [T(\vec{v})]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [\vec{v}]_\beta$ $\square$

Definición 2.11 (Multiplicación por la Izquierda)**.** Sea $\mathbf{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Definimos $L_\mathbf{A}$ como la función $L_\mathbf{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por $L_\mathbf{A}(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x} \, \forall \, \vec{x} \in \mathbb{K}^n$. Denotamos $L_\mathbf{A}$ como la multiplicación por izquierda de la transformación.

Teorema 2.18. Sea $\mathbf{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces $L_\mathbf{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ es una transformación lineal. Más aún, si $\mathbf{B} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y β y γ son las bases canónicas, y ordenadas, de $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$, respectivamente, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $[L_\mathbf{A}]_\beta^\gamma = \mathbf{A}$.
2. $L_\mathbf{A} = L_\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}$.
3. $\forall \, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow L_{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = L_\mathbf{A} + L_\mathbf{B}$ y $L_{\lambda\mathbf{A}} = \lambda L_\mathbf{A}$.
4. Si $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ es lineal $\Rightarrow \; \exists \, \mathbf{C} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $T = L_\mathbf{C}$, más aún $\mathbf{C} = [T]_\beta^\gamma$.
5. Si $\mathbf{E} \in M_{n\times p}(\mathbb{K}) \Rightarrow L_{\mathbf{AE}} = L_\mathbf{A} L_\mathbf{E}$.
6. Si $m = n \Rightarrow L_{\mathbf{I}_n} = \mathbf{I}_{F^n}$

Proof. Veamos que se cumplen todos los incisos

1. La j-ésima columna de la matriz $[L_\mathbf{A}]_\beta^\gamma$ es igual a $L_\mathbf{A}(e_j)$. Sin embargo, note que $L_\mathbf{A}(e_j) = Ae_j$, lo que implica que e_j también es la j-ésima columna de $\mathbf{A}$

   $\therefore [L_\mathbf{A}]_\beta^\gamma = \mathbf{A}$.

2. Por el inciso anterior, podemos entonces decir que $[L_\mathbf{A}]_\beta^\gamma = \mathbf{A}$ y $[L_\mathbf{B}]_\beta^\gamma = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}$. El regreso es trivial.

3. Ya demostramos que $[L_\mathbf{A}]_\beta^\gamma = B$ y que $L_\mathbf{A} = L_\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow$, por lo primero, sabemos que

   $$[L_{\lambda A+B}]_\beta^\gamma = \lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}$$

   Además

   $$[\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}]_\beta^\gamma = \lambda[L_\mathbf{A}]_\beta^\gamma + [L_\mathbf{B}]_\beta^\gamma = \lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}$$

   Del segundo inciso

   $$L_{\lambda\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \lambda L_\mathbf{A} + L_\mathbf{B}$$

4. Sea $\mathbf{C} = [T]_\beta^\gamma$. Por el Teorema 2.17 tenemos que $[T(\vec{v})]_\gamma = [T]_\beta^\gamma[\vec{v}]_\beta$. O también que $T(\vec{v}) = \mathbf{C}\vec{v} = L_\mathbf{C}(\vec{v}) \,\forall\, \vec{v} \in \mathbb{K}^n$. La unicidad de $\mathbf{C}$ se sigue del segundo inciso.

5. $\forall j \in 1, 2, ..., p$, usamos el Teorema 2.3 varias veces para notar que $(\mathbf{AE})_{ej}$ es la j-ésima columna de $\mathbf{AE}$ y que esta es igual a $\mathbf{A}(\mathbf{E}_{e_j})$. Entonces $(\mathbf{AE})_{e_j} = \mathbf{A}(\mathbf{E}_{ej}) \Rightarrow$

$$L_{\mathbf{AE}}(e_j) = (\mathbf{AE})_{ej} = \mathbf{A}(\mathbf{E}_{e_j}) = L_\mathbf{A}(\mathbf{E}_{e_j} = L_\mathbf{A}(L_\mathbf{E}(e_j))$$

$\therefore L_{\mathbf{AE}} = L_\mathbf{A} L_\mathbf{E}$ por el Teorema 2.9.

6. $\forall\, \vec{x} \in \mathbb{K}^n$ tenemos que $L_{\mathbf{I}_n}(\vec{x}) = \mathbf{I}_n(\vec{x}) = \vec{x}$

$\therefore$ se cumplen todos los enunciados de Teorema 2.18 □

2.3. Invertibilidad

Definición 2.12 (Invertible). Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y $T : V \to W$ una trasnformación lineal. Se dice que T es invertible si $\exists\, T^{-1} : W \to V$ tal que

$$T^{-1}T : V \to V \qquad \text{y} \qquad TT^{-1} : W \to W$$

$$(T^{-1}T)(\vec{v}) = \vec{v} \,\forall\, \vec{v} \in V \qquad \text{y} \qquad (TT^{-1})(\vec{w}) = \vec{w} \,\forall\, \vec{w} \in W$$

Es decir que $T^{-1}T = \mathrm{Id}_V$ y $TT^{-1} = \mathrm{Id}_W$

Definición 2.13 (Matriz Inversa). Sea $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \mathbf{A}$ es invertible si $\exists\, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$. La matriz $\mathbf{B}$ se llama la inversa de $\mathbf{A}$ y se denota como $\mathbf{A}^{-1}$.

Lema 2.1. Si $T : V \to W$ es invertible $\Rightarrow V$ es de dimensión finita $\Leftrightarrow W$ es de dimensión finita. En este caso $\dim_\mathbb{K}(V) = \dim_\mathbb{K}(W)$

Proof. $\Rightarrow$ Suponga que V es de dimensión finita, y sea $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ una base ordenada de V. Por el Teorema 2.5 sabemos que $\langle T(\beta)\rangle = \mathrm{Im}(T) = W$, por lo tanto (por el Teorema 1.18) $dim_\mathbb{K}(W) < \infty$.

$\Leftarrow$ Si $\dim_\mathbb{K}(W) < \infty$, entonces la prueba es análoga a la ida, solo que utilizando T^{-1} con una base de W. Suponga que V y W son de dimensión finita, como T es invertible (T es inyectiva y sobreyectiva), entonces

$$\dim_\mathbb{K}(\ker(T)) = 0 \text{ y } \dim_\mathbb{K}(\mathrm{Im}(T)) = \dim_\mathbb{K}(W)$$

Por el Teorema 2.6 se sigue entonces que $\dim_\mathbb{K}(V) = \dim_\mathbb{K}(W)$. □

Teorema 2.19. Si $T : V \to W$ es un transformación lineal, $\beta = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$, $\gamma = \{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n\}$ bases de V y W respectivamente $\Rightarrow T$ es invertible $\Leftrightarrow [T]_\beta^\gamma$ es invertible. Más aún

$$\left([T]_\beta^\gamma\right)^{-1} = \left[T^{-1}\right]_\gamma^\beta$$

como se define en Definición 2.6

Proof. $\Rightarrow$ Supongamos que T es invertible. Por el Lema 2.1, tenemos que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$. Sea $n = \dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$. Se sigue entonces que $[T]_\beta^\gamma \in M_n(\mathbb{K})$. Por la Definición 2.12 sabemos que $TT^{-1} = \mathrm{I}_W$ y $T^{-1}T = \mathrm{I}_V \Rightarrow$

$$\mathbf{I}_n = [\mathrm{I_V}]_\beta = [T^{-1}T]_\beta = [T^{-1}]_\gamma^\beta [T]_\beta^\gamma$$

Note, también, que

$$\mathbf{I}_n = [\mathrm{I_W}]_\gamma = [TT^{-1}]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [T^{-1}]_\gamma^\beta$$

Esto implica, por la Definición 2.13, que $[T]_\beta^\gamma$ es invertible y que $[T^{-1}]_\gamma^\beta = ([T]_\beta^\gamma)^{-1}$.

$\Leftarrow$ Supongamos que $\mathbf{A} = [T]_\beta^\gamma$ es invertible $\Rightarrow \exists\, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$. Por el Teorema 2.9 $\exists\, R \in \mathscr{L}(W, V)$ tal que $\forall\, j = \{1, 2, ..., n\}$

$$R(\vec{w}_j) = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} \vec{v}_i$$

Donde $\gamma = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_n\}$ y $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$. Esto implica que $B = [R]_\gamma^\beta$. Note usted, por el Teorema 2.15 que

$$[RT]_\beta = [R]_\gamma^\beta [T]_\beta^\gamma = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n = [\mathrm{I}_V]_\beta$$

y que

$$[TR]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [R]_\gamma^\beta = \mathbf{AB} = \mathbf{I}_n = [\mathrm{I}_W]_\gamma$$

$\therefore R = T^{-1}$, dado que se cumple $RT = \mathrm{I}_V$ y $TR = \mathrm{I}_W$. ☐

Corolario. Sea V un espacio vectorial, finitamente generado, sobre un campo $\mathbb{K}$, con una base ordenada β, y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Entonces T es invertible $\Leftrightarrow [T]_\beta$ es invertible. Más aún, $[T^{-1}]_\beta = \big([T]_\beta\big)^{-1}$.

Proof. Suponga que $V = W$ y $\beta = \gamma$, entonces la prueba es obvia dado el Teorema 2.19. ☐

Corolario. Sea $B \in M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow B$ es invertible $\Leftrightarrow L_{\mathbf{A}}$ es invertible. Más aún, $L_{\mathbf{A}^{-1}} = (L_{\mathbf{A}})^{-1}$.

Proof. Dado el corolario anterior, si se toma $V = \mathbb{K}^n$, se sigue del Teorema 2.19. ☐

Teorema 2.20. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{K})$ matrices invertibles $\Rightarrow \mathbf{AB}$ es invertible y $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Proof. Como $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son invertibles $\exists\, \mathbf{A}^{-1}$ y $\mathbf{B}^{-1}$ tales que

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n \qquad \text{y} \qquad \mathbf{BB}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$$

$$\Rightarrow (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}_n\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$$
$$\Rightarrow (\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{ABB}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

$\therefore (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = (\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}_n$ ☐

Teorema 2.21. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{O} \in M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow$ se cumple lo siguiente

1. Si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A}$ no es invertible.

2. Si $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ y $\mathbf{B}$ es una matriz con entradas distintas de cero, $\mathbf{A}$ no puede ser invertible.

Proof. 1. Suponga que $\mathbf{A}$ es invertible $\Rightarrow \exists \mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{O}\mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O}$, lo que contradice que $\mathbf{O}$ no es invertible

$\therefore$ $\mathbf{A}$ no es invertible.

2. Suponga que $\mathbf{A}$ es inveritble $\Rightarrow \exists \mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{B} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{O} = \mathbf{O}$, lo que contradice la hipótesis de que $\mathbf{B}$ es una matriz con entradas distintas al cero

$\therefore$ $\mathbf{A}$ no es invertible.

$\therefore$ se cumple el Teorema 2.21 □

Ejemplo 2.4. Tomemos los espacios vectoriales

$$V = \mathbb{R}^2 \qquad \text{y} \qquad W = \mathrm{P}_1[\mathbb{R}] = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Con las bases correspondientes

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\} \qquad \gamma = \{1, x\}$$

Tomemos la transformación lineal

$$T(p,q) = (p+2q)x + 3p$$

Veamos que T es invertible.

Proof. Note que $[T]_\beta^\gamma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Esto porque $T(0,1) = 2x$ y $T(1,0) = x + 3$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$[T]_\beta^\gamma = A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left[T^{-1}\right]_\gamma^\beta$$

$$\left[T^{-1}(1)\right]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1}(1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$$

$$\left[T^{-1}(x)\right]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1}(x) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$T^{-1}(ax+b) = aT^{-1}(x) + bT^{-1}(1) = a\left(0, \frac{1}{2}\right) + b\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$$

$$T^{-1}(ax+b) = \left(\frac{b}{3}, \frac{a}{2}, -\frac{b}{6}\right) \Rightarrow T(p,q) = (p+2q)x + 3p$$

$$(T^{-1}T)(p,q) = T^{-1}(T(p,q)) = T^{-1}((p+2q)x + 3p)$$

$$= \left(\frac{1}{3}[3p], \frac{1}{2}[p+2q] - \frac{1}{6}[3p]\right) = (p,q)$$

□

2.4. Isomorfismos

Definición 2.14 (Isomorfismo). Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Decimos que V es isomorfo a W si existe una ytransformación lineal invertible $T : V \to W$. En este caso a T se le llama isomorfismo

Notación. En este caso, decimos que V es isomorfo a W, y se denota $V \approx W \Rightarrow W \approx V$

Teorema 2.22. Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita $\Rightarrow V \approx W \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$

Proof. $\Rightarrow$ Supongamos que $V \approx W \Rightarrow \exists\, T : V \to W$ invertible. Por Lema 2.1

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$$

$\Leftarrow$ Supongamos que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W) \Rightarrow$ sean $\beta = \{\vec{v}_1, .., \vec{v}_n\}$ y $\gamma = \{\vec{w}_1, .., \vec{w}_n\}$ bases de V y W

Por el Teorema 2.9 $\exists$ una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que

$$T(\vec{v}_i) = \vec{w}_i \; \forall\, i \in \{1, .., n\}$$

Veamos que T es un isomorfismo. Basta ver que T es suprayectiva.

Sea $\vec{w} \in W$. Como γ es base de W $\exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \lambda_1 \vec{w}_1 + ... + \lambda_n \vec{w}_n \\ \Rightarrow \vec{w} &= \lambda_1 T(\vec{v}_1) + ... + \lambda_n T(\vec{v}_n) \\ \Rightarrow \vec{w} &= T(\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n) \end{aligned}$$

Así, T es suprayectiva $\Rightarrow T$ es biyectiva, ya que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W) \Rightarrow T$ es invertible $\Rightarrow T$ es un isomorfismo. □

Corolario. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\Rightarrow V \approx \mathbb{K}^n \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V) = n$

Proof. Sea $W = \mathbb{K}^n \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(W) = n$. Por el Teorema 2.22 $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ □

Teorema 2.23. Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ y $\dim_{\mathbb{K}}(W) = m$, con $\beta = \{\vec{v}_1, .., \vec{v}_n\}$ y $\gamma = \{\vec{w}_1, .., \vec{w}_n\}$ bases de V y W respectivamente $\Rightarrow$ la función $\Phi : \mathcal{L}(V, W) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$ dada por

$$\Phi(T) = [T]_\beta^\gamma$$

es un isomorfismo

Proof. Recordemos que $\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W \mid T \text{ es lineal }\}$ tiene definida la operación de suma y de multiplicación por escalares.

Para ver que Φ es isomorfismo veamos

1. Φ es lineal. Sean $T, R \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\Phi(\lambda T + R) = [\lambda T + R]_\beta^\gamma = \lambda[T]_\beta^\gamma + [R]_\beta^\gamma = \lambda\Phi(T) + \Phi(R)$$

2. Φ es biyectiva. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Veamos que $\exists\, T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que $\Phi(T) = A$

$$[T]_\beta^\gamma = \left([T(\vec{v}_1)]_\gamma\right)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Sea $\vec{z}_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}\vec{w}_i \in W$, $\forall\, j \in \{1, ..., n\}$

Por el Teorema 2.9 $\exists$ una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que

$$T(\vec{v}_j) = \vec{z}_j \;\forall\, j \in \{1, .., n\}$$

Como $[T]_\beta^\gamma = A \Rightarrow \Phi(T) = [T]_\beta^\gamma = A$

$\therefore \Phi$ es un isomorfismo □

Corolario. Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, finitamente generados, donde $\dim_\mathbb{K}(V) = n$ y $\dim_\mathbb{K}(W) = m \Rightarrow \dim_\mathbb{K}(\mathscr{L}(V, W)) = m \cdot n < \infty$

Proof. Se sigue del Teorema 2.23, al ver que Φ es un isomorfismom y del Teorema 2.22, por el hecho de que un isomorfismo implica la igualdad de dimensiones entre el dominio y codominio de la transformación. □

Teorema 2.24. Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, finitamente generados, $T : V \to W$ una transformación lineal y β una base ordenada de $V \Rightarrow T$ es un isomorfismo $\Leftrightarrow T(\beta)$ es una base de W.

Proof. $\Rightarrow$ Sea $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$. Como T es sobreyectiva, s.t.q $\langle T(\beta)\rangle = W$. Como T es inyectiva $\ker(T) = \{\vec{0}_V\}$, como $\vec{0}_V \in V \Rightarrow\; \exists\, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{0}_V = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i$$

donde $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0 \Rightarrow$

$$T\left(\sum_{i=1}^n \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(\vec{v}_i) = \vec{0}_W$$

$\therefore T(\beta)$ es l.i.

$\Leftarrow$ Sea $T(\beta)$ base de $W \Rightarrow W = \text{Im}(T) \Rightarrow T$ es sobreyectiva $\Rightarrow T$ es inyectiva.

$\therefore T$ es un isomorfismo □

Teorema 2.25. Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, finitamente generados, $T : V \to W$ un isomorfismo y $Z \leq V$ un subespacio $\Rightarrow$

1. $T(Z) \leq W$
2. $\dim_{\mathbb{K}}(Z) = \dim_{\mathbb{K}}(T(Z))$

Proof. Veamos que se cumplen ambos inciso

1. Sean $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in T(Z) \Rightarrow \exists\, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in Z$ tales que $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$ y $T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2 \Rightarrow$

$$T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2) = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in T(Z)$$

   Ahora, para $\lambda \in \mathbb{K}$, tenemos que

$$\lambda\vec{v}_1 \in Z \Rightarrow T(\lambda\vec{v}_1) = \lambda T(\vec{v}_1) = \lambda\vec{w}_1 \in T(Z)$$

   Por último, como $Z \leq V \Rightarrow \vec{0}_V \in Z \Rightarrow T(\vec{0}_V) = \vec{0}_w \in T(Z)$

   $\therefore T(Z) \leq W$

2. Sea $T' : Z \to W$ una transformación lineal definida como $T'(\vec{v}) = T(\vec{v})\, \forall\, \vec{v} \in Z \Rightarrow T'$ es inyectiva, dado que $\ker(T) = \{\vec{0}_V\}$ y $\vec{0}_V = \vec{0}_Z \in Z \cap V \Rightarrow T'$ es un isomorfismo (por Teorema de equivalencia demostrado en clase), más aún, por el Teorema 2.6

$$\dim_{\mathbb{K}}(Z) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(T)) = \dim_{\mathbb{K}}(T(Z))$$

$\therefore$ el Teorema 2.25 es cierto. □

Definición 2.15 (Representación Estándar)**.** Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, donde $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, y sea β una base ordenada. Denotamos a la función $\Phi_\beta : V \to \mathbb{K}^n$ definida mediante la regla de correspondencia

$$\Phi_\beta(\vec{v}) = [\vec{v}]_\beta$$

$\forall\, \vec{v} \in V$, como la representación estándar de V con respecto a β

Teorema 2.26. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, finitamente generado, con una base ordenada $\beta \Rightarrow \Phi_\beta$ es un isomorfismo.

Proof. Para ver que Φ_β es isomorfismo veamos

1. Φ_β es lineal.

   Sean $\vec{u}, \vec{z} \in V$, y $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\} \Rightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ y $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \qquad \text{y} \qquad \vec{z} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{v}_i$$

Sea $\eta \in \mathbb{K}$, sabemos que $\vec{u} + \eta\vec{z} \in V$, lo que implica que

$$\vec{u} + \eta\vec{z} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{v}_i + \eta\mu_i\vec{v}_i = (\lambda_i + \eta\mu_i)\vec{v}_i$$

Se sigue entonces que

$$\Phi_\beta(\vec{u} + \eta\vec{z}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \eta\mu_1 \\ \lambda_2 + \eta\mu_2 \\ \vdots \\ \lambda_n + \eta\mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \Phi_\beta(\vec{u}) + \eta\Phi_\beta(\vec{z})$$

$\therefore$ Φ_β es una transformación lineal.

2. Φ_β es biyectiva. Sea $\vec{v} \in V$. Si

$$\Phi_\beta(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

sabemos que

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} 0\vec{v}_i = \vec{0}_V$$

,

$\Rightarrow$ Φ_β es inyectiva. Además para toda

$$\Phi_\beta(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_n \end{bmatrix} + \eta$$

donde $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n \in \mathbb{K}$, tenemos que

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i\vec{v}_i$$

está asociada a ella.

$\therefore$ Φ_β es un isomorfismo $\square$

2.5. Matriz de Cambio de Base

Teorema 2.27. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, finitamente generado, con β y β' dos bases ordenadas, y sea $\mathbf{Q} = [\mathrm{I}_V]_{\beta'}^{\beta}$ $\Rightarrow$ se cumplen las siguientes proposiciones

1. $\mathbf{Q}$ es invertible.
2. $\forall\, \vec{v} \in V$ se tiene que $[\vec{v}]_\beta = \mathbf{Q}[\vec{v}]_{\beta'}$

Proof. Veamos que se cumplen ambas condiciones

1. Sabemos que I_V es invertible, $\Rightarrow$, por el Teorema 2.19, sabemos que $\mathbf{Q}$ es invertible.
2. Sea $\vec{v} \in V$ f.p.a $\Rightarrow$ por el Teorema 2.17

$$[\vec{v}]_\beta = [\mathrm{I}_V(\vec{v})]_\beta = [\mathrm{I}_V]_{\beta'}^{\beta}[\vec{v}]_{\beta'} = \mathbf{Q}[\vec{v}]_{\beta'}$$

$\therefore$ se cumple el Teorema 2.27 $\square$

Notación. A $\mathbf{Q}$ le llamaremos matriz de cambio de base.

Definición 2.16 (Operador Lineal). A las transformaciones lineal $T : V \to V$ se les denota como operador lineal sobre V.

Teorema 2.28. Sean $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, finitamente generado, T un operador lineal sobre V, y β y β' bases ordenadas de V. Suponga que $\mathbf{Q}$ es la matriz de cambio de base de β' a β, entonces

$$[T]_{\beta'} = \mathbf{Q}^{-1}[T]_\beta \mathbf{Q}$$

Proof. Sea I la transformación identidad en $V \Rightarrow T = \mathrm{I}T = T\mathrm{I}$, por el Teorema 2.14 $\Rightarrow$

$$\mathbf{Q}[T]_{\beta'} = [\mathrm{I}]_{\beta'}^{\beta}[T]_{\beta'}^{\beta'} = [\mathrm{I}T]_{\beta'}^{\beta} = [T\mathrm{I}]_{\beta'}^{\beta} = [T]_{\beta}^{\beta}[\mathrm{I}]_{\beta'}^{\beta} = [T]_\beta \mathbf{Q}$$

$\therefore [T]_{\beta'} = \mathbf{Q}^{-1}[T]_\beta \mathbf{Q}$. $\square$

Corolario. Sea $\mathbf{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, y sea γ una base ordenada de $\mathbb{K}^n \Rightarrow [L_{\mathbf{A}}]_\gamma = \mathbf{Q}^{-1}AQ$, donde $\mathbf{Q} \in M_n(\mathbb{K})$ y la j-ésima columna de $\mathbf{Q}$ es el j-ésimo vector de γ.

Definición 2.17 (Matriz Similar). Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{K})$. Decimos que $\mathbf{B}$ es similar a $\mathbf{A}$ si $\exists\, \mathbf{Q} \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}AQ$.

Capítulo 3

Productos Interiores

3.1. Definición y Ejemplos

Definición 3.1 (Producto Interior). Sean $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Un producto interior en V es una función $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ que satisface lo siguiente

1. $\forall\, \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in V \Rightarrow \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
2. $\forall\, \vec{v}, \vec{u} \in V$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$
3. $\forall\, \vec{v}, \vec{u} \in V \Rightarrow \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \overline{\vec{v}, \vec{u}} \rangle$ donde $\bar{\cdot}$ es el conjugado complejo
4. $\forall\, \vec{u} \in V \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$

Notación. En este capítulo, el campo $\mathbb{K}$ solo puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

Corolario. Un producto interior es lineal en la primer entrada

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i, \vec{w} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left\langle \vec{v}_i, \vec{w} \right\rangle$$

Observación. Sea $z, w \in \mathbb{C}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ donde $z = a + ib$ y $z = a - ib \Rightarrow$

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$
4. $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$

Ejemplo 3.1. Sea $V = \mathbb{C}^n$ y $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}^n$

En este caso $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n), \vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ con $u_i, v_i \in \mathbb{C}\, \forall\, i \in \{1, ..., n\}$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (u_1, u_2, ..., u_n), (v_1, v_2, ..., v_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v}_i$$

Ejemplo 3.2. Sen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Definimos

$$C([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \; f \text{ es continua } \}$$

Es conocido que $C([a,b])$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Más aún, si $f, g \in C([a,b]) \Rightarrow fg : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

con $x \in X$ es también una función continua. También es bien conocido que $C([a,b]) \subseteq R([a,b])$, es decir, toda función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable

Bajo estas condiciones, veamos que la función

$$\langle \;, \; \rangle : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$$

es un producto interior

Proof.

1. Sea $f, g \in C([a,b])$ arbitrarios

$$\Rightarrow \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx = \int_a^b g(x)f(x)\, dx = \langle g, f \rangle$$

2. Sean $f, g, h \in C([a,b])$ cualesquiera funciones

$$\Rightarrow \langle f + g, h \rangle = \int_a^b (f(x) + g(x))h(x)\, dx = \int_a^b f(x)h(x) + g(x)h(x)\, dx$$

$$= \int_a^b f(x)h(x)\, dx + \int_a^b g(x)h(x)\, dx = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$$

3. Sean $f, g \in C([a,b])$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrarios

$$\Rightarrow \langle \lambda f, g \rangle = \int_a^b (\lambda f)(x)h(x)\, dx = \int_a^b \lambda(f(x)h(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)h(x)\, dx = \lambda \langle f, g \rangle$$

4. Sea $f \in C([a,b])$ arbitrario. Debido a que $f^2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $\forall\, x \in [a,b] \Rightarrow f^2(x) \geqslant 0$. Así, como la función es una funcional lineal no negativa

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x)\, dx \geqslant \int_a^b 0\, dx = 0$$

Ahora, notemos que

$$\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \left|f(x)\right|^2 dx = 0 \overset{\text{por continuidad}}{\Longleftrightarrow} \left|f(x)\right|^2 = 0 \text{ en } [a,b] \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$\therefore \langle \;, \; \rangle$ es un producto interior en $C([a,b])$ □

Teorema 3.1. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\Rightarrow \forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$ s.t.q.

1. $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$.
2. $\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \overline{\lambda} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
3. $\langle \vec{u}, 0 \rangle = \langle 0, \vec{u} \rangle = 0$.
4. $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$.
5. Si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle\, \forall\, \vec{u} \in V \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$,

Proof.

1. Tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle &= \overline{\langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} \rangle} = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle} \\ &= \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle} + \overline{\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \end{aligned}$$

2. Note que
$$\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \overline{\langle \lambda \vec{v}, \vec{u} \rangle} = \lambda \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle} = \overline{\lambda} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

3. Por el segundo inciso, se tiene que

$$\langle \vec{u}, 0 \rangle = \overline{0} \langle \vec{u}, 0 \rangle = 0$$

   Y, de manera análoga
$$\langle 0, \vec{u} \rangle = \overline{\langle \vec{u}, 0 \rangle} = 0$$

4. $\Leftarrow$ Por el tercer inciso, note que si $\vec{u} = 0 \Rightarrow \langle 0, 0 \rangle = 0$

   $\Rightarrow$ Suponga que $\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$.

5. Note que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle\, \forall\, \vec{u} \in V \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} - \vec{w} \rangle = 0\, \forall\, \vec{u} \in V$$

   Y, también

   $\langle \vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{v} - \vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$.

$\therefore$ se cumple el Teorema 3.1 □

Definición 3.2 (Norma). Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Una norma en V es una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades

(N_1) $\forall\, x \in V \Rightarrow \|x\| \geqslant 0$

(N_2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$, donde $\vec{0}$ es el neutro aditivo de V

(N_3) $\forall\, x \in V$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(N_4) $\forall\, x, y \in V \Rightarrow \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Teorema 3.2 (Desigualdad de Cauchy - Schwarz). Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio con producto interior, $\Rightarrow \forall\, x, y \in V$ s.t.q.

$$\left|\langle x, y\rangle\right| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

Proof. Sean $x, y \in V$ Para y tomamos los siguientes casos

1. $y = \vec{0}$

$$\Rightarrow \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = \langle 0 \cdot \vec{0}\rangle = 0\langle y, z\rangle = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \left|\langle x, y\rangle\right| = 0 \Rightarrow \left|\langle x, y\rangle\right| = 0 \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{0} = 0$$

En este caso, se cumple la desigualdad.

2. $y \neq \vec{0}$

Resolvamos para λ la siguiente ecuación

$$\langle x - \lambda y, \lambda y\rangle = 0$$

Note que

$$\langle x - \lambda y, \lambda y\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, \lambda y\rangle - \langle \lambda y, \lambda y\rangle = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda\langle x, y\rangle - \lambda^2\langle y, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda[\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, y\rangle] = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \qquad \text{o} \qquad \langle x, y\rangle - \lambda\langle y, y\rangle = 0$$

Debido a que $\lambda \neq 0$ s.t.q

$\lambda_0 = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ es una solución no cero de lo anterior.

Observe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\lambda) = \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \geqslant 0$$

Sustituyendo a λ_0 en $f(\lambda)$ s.t.q. $f(\lambda_0) \geqslant 0$

Note ahora que

$$0 \leqslant f(\lambda_0) = \langle x - \lambda_0 y, x - \lambda_0 y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, -\lambda_0 y\rangle + \langle -\lambda_0 y, x\rangle + \langle -\lambda_0 y, -\lambda_0 y\rangle$$
$$= \langle x, x\rangle - 2\lambda_0\langle x, y\rangle + \lambda_0^2\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle^2}\langle y, y\rangle$$
$$= \langle x, x\rangle - 2\frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle} = \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle}$$
$$\Rightarrow \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle} \leqslant \langle x, x\rangle \Rightarrow \langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle y, y\rangle\langle x, x\rangle$$
$$\Rightarrow \left|\langle x, y\rangle\right| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

$\therefore$ el Teorema 3.2 es cierto. □

Teorema 3.3 (Desigualdad de Minkowski). Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio con producto interior, $\Rightarrow \forall\, x, y \in V$ s.t.q.

$$\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

Proof. Sean $x, y \in V$ cualesquiera elementos. Note que

$$\begin{aligned}\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle} &\Leftrightarrow \langle x+y, x+y\rangle \leqslant \left(\sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leqslant \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle \\ &\langle x, y\rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ para probar Teorema 3.3 basta probar $\langle x, y\rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$

Notemos que

$$\langle x, y\rangle \leqslant \left|\langle x, y\rangle\right|$$

Por el Teorema 3.2 s.t.q.

$$\left|\langle x, y\rangle\right| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle} \Rightarrow \langle x, y\rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

$\square$

Definición 3.3. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio con producto interior. Definimos a la norma de $x \in V$ como el número $\in \mathbb{R}$ tal que

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Note que $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ es una función.

Teorema 3.4. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio vectorial real con producto interior $\Rightarrow$ la norma definida en la Definición 3.3 es una norma en V.

Proof. (N_1) Si $x \in V$ es un elemento arbitrario $\Rightarrow \langle x, x\rangle \geqslant 0$. Así que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geqslant 0$

(N_2) Debido a que $\forall\, x \in V \Rightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$, podemos concluir que $\forall\, x \in V \Rightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ puesto que

$$\sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

(N_3) Supongamos que $x \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrarios $\Rightarrow$ usando propiedades de $\langle\ ,\ \rangle$ s.t.q.

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\langle x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\langle \lambda x, x\rangle} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\|x\|$$

(N_4) Sean $x, y \in V$ arbitrarios. Por el Teorema 3.3 s.t.q.

$$\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

Es decir

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

$\square$

Definición 3.4. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. con producto interior. Se dice que $\vec{u}, \vec{v} \in V$ son ortogonales (o perpendiculares) si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

Se dice que $S \subseteq V$ es un conjunto ortogonal si $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in S \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

Se dice que $\vec{u} \in V$ es un vector unitario si $\|\vec{u}\| = 1$.

Se dice que $S \subseteq V$ es un ortonormal si S es ortogonal y $\forall\, \vec{u} \in V \Rightarrow \|\vec{u}\| = 1$.

3.2. Proceso de Gram-Schmidt

Definición 3.5 (Base Ortonormal)**.** Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con productor interior. Se dice que $\beta \subseteq V$ es una base ortonormal de V si es una base ordenada y es ortonormal.

Teorema 3.5. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con productor interior, $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ un conjunto ortogonal donde $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ y $\vec{u} \in V$. Si $\vec{u} \in \langle S \rangle \Rightarrow$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}_i \rangle}{\|\vec{v}_i\|^2} \vec{v}_i$$

Proof. Como $\vec{u} \in \langle S \rangle\ \exists\, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i$. Sea $j \in \{1, 2, ..., k\}$

$$\Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v}_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i, \vec{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \lambda_j \langle \vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle \text{ dado que } S \text{ es ortogonal.}$$

$$\Rightarrow \lambda_j = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}_j \rangle}{\|\vec{v}_j\|^2} \Rightarrow \vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}_i \rangle}{\|\vec{v}_i\|^2} \vec{v}_i$$

□

Corolario. Si $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ es un conjunto ortonormal $\Rightarrow \vec{u} = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \vec{u}, \vec{v}_i \rangle \vec{v}_i$.

Corolario. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior, y sea $S \subseteq V$ un cojunto ortogonal donde todos los vectores son distintos de cero $\Rightarrow S$ es un cojunto l.i.

Teorema 3.6 (Gram-Schmidt)**.** Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior, y sea $S \subseteq V = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_n\}$ un conjunto l.i. Definimos $S' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ donde $\vec{v}_1 = \vec{w}_1$ y

$$\vec{v}_n = \vec{w}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \vec{w}_n, \vec{v}_i \rangle}{\|\vec{v}_i\|^2} \vec{v}_i$$

$\forall\, n \in \{2, 3, ..., n\} \Rightarrow S'$ es un conjunto ortogonal de vectores distintos al cero tales que $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$.

Proof. Por inducción sobre n

1. Si $n = 1 \Rightarrow S = \{\vec{w}_1\} = S'$.

2. Supongamos el resultado cierto para $n - 1$.

3. Veamos que S'_n no contiene al cero, S'_n es ortogonal y $\langle S'_n\rangle = \langle S_n\rangle$.

   Sea $S_n = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_n\}$ un conjunto l.i. y sea $S'_n = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ como en el Teorema 3.6. Suponga que $\vec{0} \in S'_n$. Como $S_{n-1} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_{n-1}\}$ es l.i. y tiene $n-1$ vectores $\Rightarrow S'_{n-1} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_{n-1}\}$ es un conjunto ortogonal que no contiene al cero, y además, $\langle S'_{n-1}\rangle = \langle S_{n-1}\rangle$. Sabemos que $\vec{0} \in S'_n$ y $\vec{0} \notin S'_{n-1} \Rightarrow \vec{v}_n = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{0} = \vec{w}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \vec{w}_n, \vec{v}_j\rangle}{\|\vec{v}_j\|^2}\vec{v}_j \Rightarrow \vec{w}_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \vec{w}_n, \vec{v}_j\rangle}{\|\vec{v}_j\|^2}\vec{v}_j \in \langle S'_{n-1}\rangle = \langle S_{n-1}\rangle$$

   Lo que es una contradicción, porque S_n ya no sería un conjunto l.i $\Rightarrow \vec{0} \notin S'_n$.

   Ahora, Sea $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$

$$\Rightarrow \langle \vec{v}_n, \vec{v}_i\rangle = \left\langle \vec{w}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \vec{w}_n, \vec{v}_j\rangle}{\|\vec{v}_j\|^2}\vec{v}_j, \vec{v}_i \right\rangle = \langle \vec{w}_n, \vec{v}_i\rangle - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \vec{w}_n, \vec{v}_j\rangle}{\|\vec{v}_j\|^2}\langle \vec{v}_j, \vec{v}_i\rangle$$

   Como $S'n-1$ es ortogonal se tiene que $\langle \vec{v}_j, \vec{v}_i\rangle \neq 0 \Leftrightarrow j = i$

$$\Rightarrow \langle \vec{v}_n, \vec{v}_i\rangle = \langle \vec{w}_n, \vec{v}_i\rangle - \frac{\langle \vec{w}_n, \vec{v}_i\rangle}{\|\vec{v}_i\|^2}\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i\rangle = \langle \vec{w}_n, \vec{v}_i\rangle - \frac{\langle \vec{w}_n, \vec{v}_i\rangle}{\|\vec{v}_i\|^2}\|\vec{v}_i\|^2 = 0$$

   Esto implica que S'_n es ortogonal.

   Finalmente, Sabemos que

$$\vec{v}_n = \vec{w}_n + \vec{z} \text{ donde } \vec{z} \in \langle S_{n-1}\rangle = \langle S'_{n-1}\rangle$$

$$\Rightarrow \vec{v}_n \in \langle S_n\rangle \Rightarrow S'_n \subseteq \langle S_n\rangle \Rightarrow \langle S'_n\rangle \subseteq \langle S_n\rangle$$

   También, note usted que

$$\vec{w}_n = \vec{v}_n - \vec{z}$$

$$\Rightarrow \vec{w}_n \in \langle S'_n\rangle \Rightarrow S_n \subseteq \langle S'_n\rangle \Rightarrow \langle S_n\rangle \subseteq \langle S'_n\rangle$$

   Por la doble contención $\langle S'_n\rangle \subseteq \langle S_n\rangle$ y $\langle S_n\rangle \subseteq \langle S'_n\rangle \Rightarrow \langle S'_n\rangle = \langle S_n\rangle$

$\therefore$ se cumple el Teorema 3.6 $\square$